

ditec

Dipartimento di Termoenergetica e Condizionamento Ambientale

## **ESERCITAZIONI DI FISICA TECNICA 1**

**Per allievi ingegneri navali**

Federico Scarpa

Parte Prima

A.A. 2004-2005

## Esercitazione n° 1

### UNITA' DI MISURA

#### *Premessa*

Nella pratica ingegneristica (ma non solo) è necessario utilizzare *unità* delle quantità fisiche coinvolte nei vari calcoli. Una unità è uno specifico ammontare di una quantità per mezzo del quale ogni altra quantità dello stesso tipo è misurata per confronto. Metri, centimetri, chilometri, piedi e pollici sono tutte unità di lunghezza. Secondi, minuti e ore sono invece unità alternative di tempo. Siccome le quantità fisiche sono fra loro collegate da definizioni e leggi, un piccolo numero di unità è sufficiente per definire e misurare tutte le altre.

Nonostante la generale convinzione della necessità di una unificazione, ossia di un sistema di unità di misura che, possedendo i requisiti di coerenza logica e di pratica utilizzazione, sia adottato a livello internazionale, sono tuttora in uso, ma in via di scomparsa, vari sistemi di unità di misura. Nei paesi anglosassoni, ad esempio, sopravvive l'utilizzazione delle unità anglosassoni (con inserita qualche unità decimale, es. il grado Celsius) ma, in genere, si sono ormai diffusi ovunque i sistemi "metrici" quali il sistema tecnico, il sistema M.K.S. ed il sistema C.G.S., utilizzato quest'ultimo soprattutto dai fisici. La XI Conferenza generale di Pesi e Misure ha comunque adottato (1960) le grandezze ed unità che devono servire di base per l'istituzione di un sistema pratico di misura per le relazioni internazionali. Tale sistema è designato come "Sistema Internazionale di Unità", abbreviato **SI**.

Nella scelta di un sistema di unità di misura, è innanzitutto necessario precisare un certo numero di grandezze fisiche indipendenti da assumere come grandezze fondamentali e dalle quali poter derivare successivamente tutte le altre, dette grandezze derivate. Si impone quindi l'adozione di opportune unità di misura per tali grandezze ed infine la istituzione di campioni o grandezze di riferimento delle unità di misura adottate, in modo da poter disporre di un riferimento costante, preciso, attendibile e controllabile.

Ogni sistema di misura generalmente adotta:

- in ambito geometrico una sola grandezza (ed unità) fondamentale: normalmente la lunghezza.
- in ambito cinematico due grandezze: la lunghezza ed il tempo.
- in ambito dinamico tre grandezze: la lunghezza, il tempo e la massa o la forza. La tendenza generale è quella di assumere la massa come terza grandezza fondamentale.

Si introducono poi ulteriori grandezze in altri campi della scienza e della tecnica: la temperatura è inclusa per la termodinamica, la corrente elettrica per le applicazioni che coinvolgono l'elettricità. Sebbene le grandezze necessarie per descrivere i vari fenomeni e processi nel campo della tecnica siano ben più numerose di quelle elencate, si può osservare come, nella generalità dei casi, dette grandezze si possano ricavare da quelle fondamentali appena precisate. Così la forza (massa) può essere introdotta definendola in funzione della massa (forza), la densità in funzione della massa e della lunghezza, etc. Si denominano così grandezze derivate tutte le grandezze fisiche che si possono ricavare, esprimere o derivare dalle grandezze fondamentali attraverso combinazioni di queste ultime o per mezzo di leggi fisiche.

Una volta stabilite le grandezze fondamentali e quelle derivate è necessario adottare le corrispondenti unità di misura al fine di esprimere mediante un numero un determinato ammontare della grandezza considerata. Detto  $E$  l'ammontare in questione (grandezza in misura) e  $U_E$  la corrispondente unità di misura, risulterà:

$$E = nU_E$$

dove  $n$  è un numero reale. Si definisce misura di una grandezza il rapporto  $n$  tra il valore del misurando,  $E$ , ed il valore di una grandezza ad essa omogenea,  $U_E$ , assunta come unità (di misura) dipendente, quest'ultima, dal sistema di misura adottato.

Come detto, adottate le unità di misura fondamentali occorre l'istituzione di opportuni campioni di riferimento. Con riferimento al sistema SI, l'unità fondamentale di lunghezza è il metro, m, definito come 1650763.73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della linea rossa-arancio dello spettro del Cripto-86. L'unità base di tempo è il secondo, s, definito come 9192631770 volte il periodo della radiazione associata ad una particolare transizione (iperfine) dell'atomo di Cesio-133. L'unità fondamentale di massa nel Sistema Internazionale è il chilogrammo, Kg, uguale alla massa di un particolare cilindro di platino-iridio conservato presso l'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure, vicino Parigi.

### **Generalità**

Per sistema di unità di misura si intende un sistema di  $p$  grandezze fisiche legate fra loro da  $(p-q)$  relazioni ( leggi fisiche, definizioni ) tra  $q$  grandezze scelte ad arbitrio come fondamentali. Un sistema di misura è quindi un sistema di unità, dei loro multipli e sottomultipli per mezzo dei quali è possibile misurare tutte le grandezze fisiche. Per quanto possibile ogni sistema di unità di misura dovrebbe risultare:

- a) omogeneo, cioè tale che tutte le grandezze fisiche e le unità corrispondenti possano dedursi dalle grandezze fondamentali e dalle loro unità facendo ricorso alle relazioni fisiche che le legano alle grandezze fondamentali scelte.
- b) coerente, quando il prodotto od il quoziente di più unità determinano una nuova unità il cui valore è sempre unitario.
- c) assoluto, quando le unità scelte sono determinate ed invariabili in ogni tempo ed in ogni luogo.
- d) decimale, quando, oltre alle unità scelte, si introducono multipli e sottomultipli decimali delle unità stesse, ossia quando tutti i multipli e sottomultipli delle unità di ogni grandezza sono potenze di 10.

### **Il sistema SI**

Può essere considerato un perfezionamento del sistema M.K.S.A., è omogeneo, coerente, assoluto e decimale, adotta sette grandezze fondamentali e due supplementari riportate nella seguente tabella.

Grandezza	Unità	Simbolo
fondamentali		
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
intervallo di tempo (durata)	secondo	s
intensità di corrente elettrica	ampere	A
temperatura	kelvin	K
intensità luminosa	candela	cd
quantità di materia	mole	mol
supplementari		
angolo piano	radiante	rad
angolo solido	steradiano	sr

con riferimento alle seguenti definizioni

- metro (m)	Lunghezza uguale a 1650763.73 volte la lunghezza d'onda, nel vuoto, della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$ dell'atomo di cripto 86. In Italia il metro è attuato mediante il campione dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.
- chilogrammo (kg)	Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breuil (Sevres). In Italia il campione del chilogrammo è conservato presso il ministero dell'Industria - Servizio Metrico -, a Roma.
- secondo (s)	Intervallo di tempo che contiene 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133.
- ampere (A)	Intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra i due conduttori la forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton su ogni metro di lunghezza. In Italia l'ampere è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.
- kelvin (K)	Frazione $\frac{1}{273.16}$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. In Italia la scala termodinamica della temperatura è attuata mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.
- candela (cd)	Intensità luminosa di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e intensità $1/683$ W/sr. In Italia la candela è attuata mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.
- mole (mol)	Quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0.012 chilogrammi di carbonio 12. Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, etc. ovvero gruppi specificati di tali particelle. <sup>1</sup>

per le grandezze supplementari si ha:

- radiante (rad)	Angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.
- steradiano (sr)	Angolo solido al centro che su una sfera intercetta una calotta di area uguale a quella del quadrato il cui lato ha la lunghezza del raggio

<sup>1</sup> La massa molecolare di una sostanza è il peso in grammi di una mole di quella sostanza. Es. la massa del carbonio-12 è 12 g/mole; una grammomole (mole) di carbonio-12 è una quantità di  $C_{12}$  la cui massa espressa in grammi è pari al numero che esprime la massa molecolare dell'elemento .

Solo le prime quattro grandezze sono veramente fondamentali, infatti ( consideriamo per esempio il caso della temperatura ) la temperatura termodinamica T, in base alla teoria cinetica dei gas monoatomici, è legata alla energia interna (per mole) dalla relazione

$$U = \frac{3}{2}kNT$$

dove k rappresenta la costante di Boltzmann ed N il numero di Avogadro ( pari a  $6.023 \cdot 10^{23}$  entità elem./mole)

Di seguito si riporta la definizione di alcune grandezze derivate di uso comune.

- newton (N)	Forza che imprime ad un corpo con massa di un kg l'accelerazione di un m/s <sup>2</sup> 1 N = 1 kg m/ s <sup>2</sup>
- pascal (Pa)	Pressione esercitata dalla forza di 1 N perpendicolarmente ad una superficie con area di 1 m <sup>2</sup> . 1 Pa = 1 N / m <sup>2</sup>
- joule (J)	Lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il suo punto di applicazione si sposta di 1 m nella direzione e nel verso della forza stessa. 1 J = 1 N m.
- watt (sr)	Potenza di un sistema che produce il lavoro di un J in un s. 1 W = 1 J s

Multipli e sottomultipli

Fattore di moltiplicazione	Prefisso	Simbolo
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	etto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-6}$	micro	μ
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

Abbiamo visto che nel SI la massa è una grandezza primaria (fondamentale) e la forza è una grandezza secondaria ottenuta attraverso la legge di Newton

$$F = m a$$

da cui  $1 \text{ N} = (1 \text{ kg}) (1 \text{ m/s}^2)$

Nel sistema tecnico invece è la forza ad essere considerata primaria e l'unità di misura adottata è il chilogrammo-peso ( o chilogrammo-forza ). Di conseguenza è la massa ad essere ora una grandezza derivata attraverso la seguente:

$$m = F/g$$

dove g è un valore nominale dell'accelerazione di gravità terrestre:  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$

La massa avrà quindi nel Sistema Tecnico la seguente unità: ( kg<sub>p</sub> s<sup>2</sup>/ m)

Calcoliamo il fattore di conversione  $N \leftrightarrow K_g$ , sarà:

$$1 (kg_p) = \text{forza peso esercitata su una massa di un kg} = g (m/s^2) \quad 1 (kg) = 9.81 (N)$$

Fattori di conversione utili

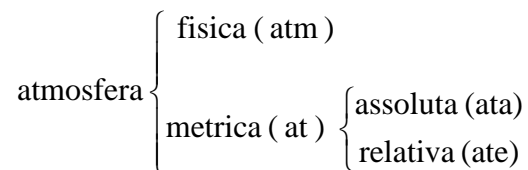
Forza	$1 kg_p = 9.81 N$
Massa	$1 kg = 1/9.81 (u.m.s.t.)$
Lavoro e potenza	$1 kg_p m = 9.81 N m = 9.81 J$ $1 kg_p m / s = 9.81 N m / s = 9.81 w$ $1 cv = 75 kg_p m / s = 0.736 kw$ $1 kwh = 3.6 \cdot 10^6 J = 860 kcal$ $1 kcal = 4186 J$

Pressione:

$$1 Pa = 1 N/m^2 = 1 \text{ pascal}$$

$$1 bar = 10^5 Pa = 10 N/cm^2$$

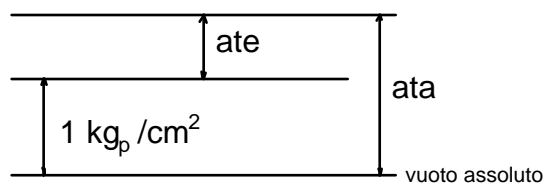
nel sistema tecnico si usa l'atmosfera:



1 (atm) è la pressione che si misura alla base di una colonna di 760 mm Hg a livello del mare.  $\gamma_{Hg} 13600 kg_p/m^3$  quindi:

$$p = \gamma_{Hg} h = 13600 \cdot 0.76 kg_p/m^2 = 10336 kg_p/m^2 = 1.033 kg_p/cm^2 = 1 atm$$

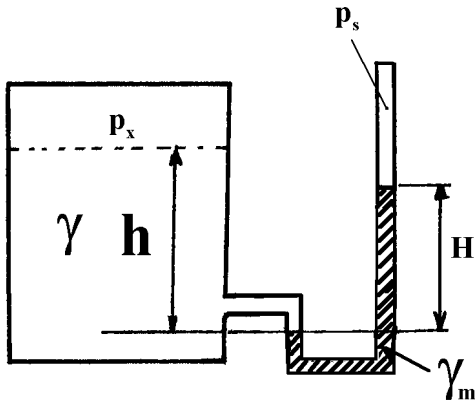
$$1 at = 1 kg_p/cm^2$$



$$1 bar = 10^5 N/m^2 = 10^5/9.81 kg_p/m^2 = 10197 kg_p/m^2 = 0.98 atm_{fisiche}$$

### Manometri chiusi

Per manometro chiuso si intende quel manometro che ha la parte estrema chiusa ed inoltre in tale cavità è stato fatto il vuoto.



Se vogliamo conoscere il valore della pressione  $p_x$  vigente nel recipiente bisogna imporre l'equilibrio delle pressioni che agiscono nei due rami del manometro

$$p_x + \gamma h = p_s + \gamma_m H$$

ma  $p_s \approx 0$  (vuoto) quindi

$$p_x = \gamma_m H - \gamma h$$

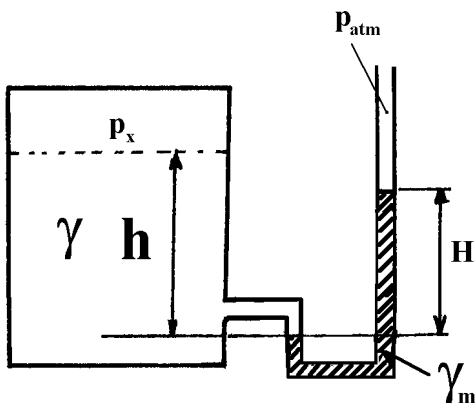
Se il serbatoio contiene un gas la precedente espressione può essere semplificata ( $\gamma \ll$

$\gamma_m$ )

$$p_x \approx \gamma_m H$$

### Manometri aperti

Sono quelli che hanno la parte terminale del tubo a diretto contatto con l'atmosfera. Anche in questo caso è possibile conoscere la pressione  $p_x$  vigente all'interno del serbatoio scrivendo l'equilibrio delle pressioni che agiscono nei due rami del manometro.



$$p_x + \gamma h = p_{atm} + \gamma_m H$$

ma  $p_s \approx 0$  (vuoto) quindi

$$p_x = \gamma_m H + p_{atm} - \gamma h$$

Se il recipiente contiene un aeriforme:

$$p_x \approx \gamma_m H + p_{atm}$$

### Esercizio sulla pressione:

Il valore attuale della pressione atmosferica è 1025 ( mbar ); determinare il valore corrispondente nelle seguenti unità:

- 1) Pa
- 2) mm (Hg)
- 3) mm (H<sub>2</sub>O)
- 4) atmosfere (at)

1)  $1025 \text{ mbar} = 1.025 \text{ bar} = 1.025 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2)  $p = \gamma h$  ;  $h = p/\gamma$                        $p = 1025 \text{ mbar} = 1.025 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

$$\gamma = \rho g = 13600 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 133416 \text{ N/m}^3$$

$$h = \frac{1.025 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2}{133416 \text{ N / m}^3} = 0.768 \text{ m(Hg)} = 768 \text{ mm(Hg)}$$

$$= 768 \text{ (torr)}$$

3)

$$\gamma = \rho g = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 9810 \text{ N/m}^3$$

$$h = \frac{1.025 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2}{9810 \text{ N / m}^3} = 10.45 \text{ m(H}_2\text{O)} = 10.44 \cdot 10^3 \text{ mm(H}_2\text{O)}$$

4)

$$p = 1025 \text{ mbar} = 1.025 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = \frac{1.025 \cdot 10^5}{9.81} \text{ kg}_p\text{/m}^2$$

$$= \frac{1.025 \cdot 10^5}{9.81 \cdot 10^4} \text{ kg}_p\text{/cm}^2 = 1.045 \text{ at}$$

Temperatura

$$T \text{ } ^\circ\text{F} = 1.8 T \text{ } ^\circ\text{C} + 32$$

***Passaggio a diverso sistema di unità***

Dato il valore di una grandezza ( fondamentale o derivata ) in un determinato sistema di unità di misura si presenta spesso la necessità di determinare il valore corrispondente nelle unità di un altro sistema. Il problema è banale nel caso di grandezze fondamentali . Vediamo come si affronta il caso generale.

$$x [u] \rightarrow y [u^*]$$

quantità di partenza :  $x$   
 unità derivata di partenza :  $u$   
 quantità di arrivo:  $y$   
 unità derivata di arrivo:  $u^*$

1) si esprime  $u$  in termini di unità fondamentali, in genere mediante una formula del tipo

$$u = u_{f1}^{n1} u_{f2}^{n2} \dots u_{fk}^{nk} \tag{1}$$

2) si esprime ciascuna unità fondamentale in termini di unità fondamentali ( o derivate) del sistema di arrivo utilizzando tavole di conversione:

3) per sostituzione nella (1) e dopo eventuali semplificazioni si ottiene la grandezza desiderata in termini delle nuove unità di misura.



In pratica è molto più semplice di quel che sembra:

esprimere in unità del SI la seguente grandezza

$$1200 \text{ kg}_p/\text{m}^2$$

1) la grandezza ( pressione ) è già espressa come rapporto di unità fondamentali del sistema tecnico.

2)  $1 \text{ kg}_p = 9.81 \text{ N}$

3)  $1200 \text{ kg}_p/\text{m}^2 = 1200 \cdot 9.81 \text{ N}/\text{m}^2 = 11770 \text{ Pa} = 0.1177 \text{ bar}$

Si nota che mentre nel sistema tecnico la pressione si esprime in termini di unità fondamentali, nel SI si esprime mediante unità derivate ; potremmo scrivere ad esempio

$$11770 \text{ kg}/\text{ms}^2$$

ma non sarebbe di immediata comprensione.

### *Esempi*

- Ciascuno dei 2 reattori di una centrale nucleare di potenza consuma 0.051 t di uranio 235 al giorno. La potenza prodotta da ognuno dei quattro generatori è di 85 Mw. La potenza richiesta per ricircolare il refrigerante ( CO<sub>2</sub> ) attraverso i reattori e gli scambiatori di calore e per far funzionare gli ausiliari è di 17 Mw per reattore. Valutare il consumo specifico.

$$\text{consumo spec.} = \frac{\text{consumo orario di combustibile}}{\text{potenza prodotta}}$$

Portata oraria di combustibile  $= \frac{0.051 \text{ t}}{24 \text{ h}} \cdot 2 = \frac{51 \cdot 2}{24} \text{ (kg / h)} = 4.25 \text{ (kg / h)}$

Potenza prodotta  $= 85 \cdot 4 - 17 \cdot 2 = 306 \text{ (Mw)} = 306 \cdot 10^3 \text{ (kw)}$

Consumo specifico  $= \frac{4.25 \text{ (kg / h)}}{306 \cdot 10^3 \text{ (kw)}} = 1.39 \cdot 10^{-5} \left( \frac{\text{kg}}{\text{kwh}} \right)$

Si nota che il denominatore poteva essere espresso in joule ( energia ) . In ogni caso, quando si ha a che fare con produzione o consumo di energia elettrica è uso utilizzare il kwh per ragioni pratiche.

$$1 \text{ kwh} = 1000 \text{ w} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$$

- Un motore diesel per sottomarino sviluppa 1200 kw. Il suo consumo di combustibile è di 5 kg al minuto.

$$C.S. = \frac{5 \cdot 60 \text{ kg / h}}{1200 \text{ kw}} = 0.25 \text{ kg / kwh}$$

- Un motore a gas è accoppiato ad una dinamo che fornisce 120 A a 110 V. Il gas è ottenuto da un impianto di produzione alimentato con coke con una portata di 150 kg ogni 8 ore.

$$C.S. = \frac{150 \text{ kg / 8h}}{110 \text{ V } 120 \text{ A}} = 1.42 \cdot 10^{-3} \text{ kg / wh} = 1.42 \text{ kg / kwh}$$

- Un motore a benzina è montato su un autocarro che viaggia ad una velocità media  $c = 65 \text{ km/h}$ , incontrando una forza resistente totale  $F = 1123 \text{ N}$ . Il consumo di benzina è di  $7.11 \text{ km/lt}$ . ( $\rho_{\text{benzina}} = 0.73 \text{ kg/lt}$ ).

La potenza sviluppata vale  $P = Fc = 1123 \text{ (N)} 65 \text{ (km/h)}$   
 $= 1123 \text{ (N)} 65 \cdot 1000 \text{ (m)} / 3600 \text{ (s)} = 20276 \text{ w}$   
 $= 20.276 \text{ kw}$

portata oraria di benzina  $= \frac{0.73 \text{ (kg / lt)}}{7.11 \text{ (km / lt)}} 65 \text{ (km / h)} = 6.67 \text{ kg / h}$

$$C.S. = \frac{6.67 \text{ kg / h}}{20.276 \text{ kw}} = 0.33 \text{ kg/kwh}$$

- Una centrale di potenza incorpora una turbina a vapore accoppiata ad un generatore di c.a. Il consumo orario di carbone nella caldaia è di  $178.5 \text{ t}$ , e la potenza elettrica che può essere fornita è di  $500000 \text{ kw}$ .

$$C.S. = \frac{178.5 \text{ kg / h}}{500000 \text{ kw}} = 0.357 \text{ kg/kwh}$$

## Esercitazione n° 2

### GAS PERFETTI

#### Premessa

Se si considera una sostanza pura in fase aeriforme, nel caso la densità sia sufficientemente bassa e lontano dalle condizioni di liquefazione, le variabili di stato  $p$ - $v$ - $T$  obbediscono con buona approssimazione alla seguente equazione (sperimentale) che rappresenta una equazione di stato, ossia di vincolo fra le variabili di stato:

$$p\mathcal{V} = \mathcal{R} T$$

dove $p$ = pressione assoluta in	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathcal{V}$ = volume molare	[m <sup>3</sup> /kmole]
$\mathcal{R}$ = costante universale dei gas	[J/kmole K]
$T$ = temperatura assoluta	[K]

che prende il nome di equazione di stato dei gas perfetti.

Condizioni di riferimento:

alla temperatura  $T_0$  di 0 [°C], ovvero 273.15 [K], e  $p_0 = 1 \text{ atm} = 10.1325 \cdot 10^4 \text{ [N/m}^2\text{]}$ , risulta  $\mathcal{V}_0 = 22.4(14) \text{ m}^3/\text{kmole} = 22.4 \text{ [lt/mole]}$ , possiamo valutare quindi  $\mathcal{R}$  come:

$$\mathcal{R} = p_0 \mathcal{V}_0 / T_0$$
$$\mathcal{R} = \frac{10.1325 \cdot 10^4 \cdot 22.4(14)}{273.15} = 8314. (4) \text{ [J / kmole K]}$$

Forme equivalenti per l'equazione di stato dei g.p.

dividendo per la massa molare  $\mathcal{M}$  [kg/kmole] del g.p. considerato ho:

$$p \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T \quad \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} = R_1 \text{ [J / kg K]} \text{ costante particolare}$$
$$pv = R_1 T \quad \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{M}} = v \text{ [m}^3 \text{ / kg]} \text{ volume specifico}$$

possiamo poi esprimere il volume specifico come rapporto fra volume e massa di una certa quantità di gas in esame, da cui:

$$p \frac{V}{M} = R_1 T \rightarrow pV = MR_1 T$$

ed infine

$$pV = M \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T \rightarrow pV = n \mathcal{R} T \quad n = \text{numero di kmoli in esame}$$

### Miscela

Legge di Dalton: se più gas perfetti chimicamente inerti sono mescolati in un volume  $V$ , la pressione totale  $p$  è pari alla somma delle pressioni parziali  $p_1, p_2, \dots$  dei singoli componenti nell'ipotesi che il singolo gas occupi lo stesso volume  $V$  ed alla temperatura  $T$  della miscela.

$$p_{\text{misc}} = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

$$\frac{M_{\text{misc}} R_{1 \text{ misc}} T}{V} = \frac{M_1 R_{11} T}{V} + \frac{M_2 R_{12} T}{V} + \dots$$

$$R_{1 \text{ misc}} = \sum_i \frac{M_i R_{1i}}{M} = \sum_i \pi_i R_{1i}$$

$\pi_i$  = frazione massica dell'  $i$ -esimo componente la miscela

Cominciamo col valutare  $R_1$  per alcuni gas:

$$\text{H}_2 \quad R_1 = \frac{8314}{2.016} = 4124 \text{ [J / kg K]} = 4.12 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$\text{O}_2 \quad R_1 = \frac{8314}{32} = 259.8 \text{ [J / kg K]} = 0.2598 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$\text{N}_2 \quad R_1 = \frac{8314}{28} = 296.9 \text{ [J / kg K]} = 0.2969 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$\text{CO}_2 \quad R_1 = \frac{8314}{44} = 189 \text{ [J / kg K]} = 0.189 \text{ [kJ / kg K]}$$

Vediamo ora le relazioni intercorrenti fra frazione massica, frazione volumetrica e frazione molare.

$$\text{Fraz. molare} \quad v_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\text{numero di moli dell' } i^{\text{esimo}} \text{ componente}}{\text{numero di moli totali}} = \frac{p_i V}{R T} \cdot \frac{R T}{p V} = \frac{p_i}{p}$$

$$\text{Fraz. volumetrica} \quad \alpha_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i R T}{p} \cdot \frac{p}{n R T} = \frac{n_i}{n} = v_i$$

$$v_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{\sum_i n_i} = \frac{M_i / m_i}{\sum_i M_i / m_i} = \frac{\pi_i / m_i}{\sum_i \pi_i / m_i}$$

$$\pi_i = \frac{M_i}{M} = \frac{M_i}{\sum_i M_i} = \frac{n_i m_i}{\sum_i n_i m_i} = \frac{v_i m_i}{\sum_i v_i m_i}$$

Calcoliamo la massa molecolare equivalente della miscela:

$$p_{\text{misc}} V = M_{\text{misc}} R_{1 \text{ misc}} T \quad p_{\text{misc}} v_{\text{misc}} = R_{1 \text{ misc}} T \quad p_{\text{misc}} v_{\text{misc}} = \frac{R}{M_{\text{misc}}} T$$

$$M_{\text{misc}} = \frac{R}{R_{1 \text{ misc}}} = \frac{R}{\sum_i \frac{M_i R_{1i}}{M}} = \frac{R}{\sum_i \frac{M_i}{M} \frac{R}{m_i}} = \frac{1}{\sum_i \pi_i / m_i}$$

### Esercizi

1) Determinare  $R_1$  dell'aria assumendo che le percentuali in massa dell'azoto e dell'ossigeno siano rispettivamente 79% e 21 %.

$$R_{1 \text{ aria}} = \sum_i \pi_i R_{1i} = \pi_{N_2} R_{1N_2} + \pi_{O_2} R_{1O_2} = 0.79 \frac{8314}{28} + 0.21 \frac{8314}{32} = 289 \text{ [J / kg K]}$$

2) Determinare densità, frazione massica, pressione parziale e massa molecolare apparente di una miscela gassosa avente la seguente composizione molare: 12 [kmole]  $N_2$  ; 0.5 [kmole]  $O_2$  ; 1.0 [kmole]  $CO$  ; 2.0 [kmole]  $CO_2$ . Si assumano le condizioni di riferimento (normali).

$$n = \text{numero totale [kmole]} = 12 + 0.5 + 1 + 2 = 15.5 \text{ [kmole]}$$

$$V = n \text{ [kmole]} 22.4 \text{ [m}^3/\text{kmole]} = 347.2 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$M_{\text{tot}} = \sum_i n_i M_i = 12 \cdot 28 + 0.5 \cdot 32 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 44 = 468 \text{ [kg]}$$

$$\rho = M_{\text{tot}}/V = 468/347.2 = 1.348 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

frazioni massiche $\pi_i = M_i/M_{\text{tot}}$	frazioni molari $V_i = n_i/n$
$\pi_{N_2} = 12 \cdot 28 / 468 = 0.718$	$V_{N_2} = 12 / 15.5 = 0.774$
$\pi_{O_2} = 0.5 \cdot 32 / 468 = 0.034$	$V_{O_2} = 0.5 / 15.5 = 0.032$
$\pi_{CO} = 1 \cdot 28 / 468 = 0.06$	$V_{CO} = 1 / 15.5 = 0.0645$
$\pi_{CO_2} = 2 \cdot 44 / 468 = 0.094$	$V_{CO_2} = 2 / 15.5 = 0.129$

calcoliamo le pressioni parziali ricordando che  $V_i = p_i/p$

$$p_{N_2} = 101325 \cdot 0.774 = 78.4 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$p_{O_2} = 101325 \cdot 0.032 = 3.27 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$p_{CO} = 101325 \cdot 0.0645 = 6.54 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$p_{CO_2} = 101325 \cdot 0.129 = 13.07 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

Calcoliamo  $R_{1 \text{ misc}}$  utilizzando i dati di pagina 2 e 3.

$$R_{1 \text{ misc}} = \sum_i \frac{M_i R_{1i}}{M} = \sum_i \pi_i R_{1i}$$

$$R_{1 \text{ misc}} = 0.718 \cdot 296.9 + 0.034 \cdot 259.8 + 0.06 \cdot 296.9 + 0.094 \cdot 189 = 275.35 \text{ [J / kg K]}$$

Ricaviamo la massa molecolare equivalente della miscela

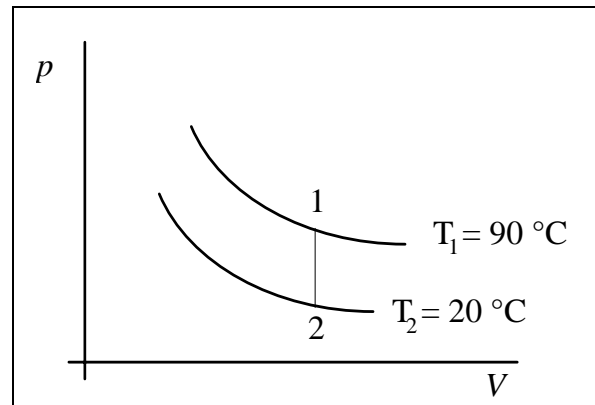
$$m_{eq} = \frac{\mathcal{R}}{R_{1 \text{ misc}}} = 30.19 \text{ [kg / kmole]}$$

2) Un recipiente del volume di 270 lt contiene azoto alla pressione di 9 [bar] ed alla temperatura di 90 °C. Si determini la densità ed il valore della pressione quando l'azoto viene raffreddato sino alla temperatura di 20 °C. Si consideri l'azoto g.p.

$9 \text{ bar} = 9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $270 \text{ lt} = 0.27 \text{ m}^3$ $90 \text{ }^\circ\text{C} = 363.15 \text{ K}$ $20 \text{ }^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$
--

$$R_1 = \frac{\mathcal{R}}{m} = \frac{8314 \text{ [J / kmole K]}}{28 \text{ [kg / kmole]}} = 296.9 \text{ [J / kg K]}$$

$$pV = R_1 MT$$



$$M = pV / R_1 T = \frac{9 \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2\text{]} \cdot 0.27 \text{ [m}^3\text{]}}{296.9 \text{ [J / kg K]} \cdot 363.15 \text{ [K]}} = 2.25 \text{ [kg]}$$

densità:  $\rho = l/v = M/V = \frac{2.25 \text{ [kg]}}{0.27 \text{ [m}^3\text{]}} = 8.35 \text{ [kg / m}^3\text{]}$

in questo caso non dipende dalla temperatura ( V e M non variano )  
Troviamo una espressione per la pressione, dovrà essere:

$$p_1 V_1 = R_1 M_1 T_1$$

$$p_2 V_2 = R_1 M_2 T_2$$

ma  $V_1 = V_2$  e  $M_1 = M_2$

dividendo otteniamo  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ;  $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$

$$p_2 = 9 \frac{293.15}{363.15} = 7.26 \text{ [bar]} = 7.26 \cdot 10^5 \text{ [Pa]}$$

3) In una bombola da 150 lt vi è dell'ossigeno alla pressione di 10 Kg<sub>p</sub>/cm<sup>2</sup> ed alla temperatura di 18 °C. Quanto ossigeno è contenuto nella bombola? Parte dell'ossigeno viene utilizzata; allorché la pressione è ridotta a 1.2 bar, con temperatura invariata, quanto ossigeno è rimasto nella bombola?

$10 \text{ kg}_p = 10 \cdot 9.81 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ $1.2 \text{ bar} = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $150 \text{ lt} = 0.15 \text{ m}^3$ $18 \text{ }^\circ\text{C} = 291.15 \text{ K}$
---

$$R_1 = \frac{8314 \text{ [J / kmole K]}}{32 \text{ [kg / kmole]}} = 259.8 \text{ [J / kg K]}$$

$$M_1 = \frac{p_1 V_1}{R_1 T_1} = \frac{9.81 \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2\text{]} \cdot 0.15 \text{ [m}^3\text{]}}{259.8 \text{ [J / kg K]} \cdot 291.15 \text{ [K]}} = 1.945 \text{ [kg]}$$

$$p_1 V_1 = R_1 M_1 T_1$$

$$p_2 V_2 = R_1 M_2 T_2$$

ma  $V_1 = V_2$  e  $T_1 = T_2$  da cui

$$M_2 = M_1 \frac{p_2}{p_1} = 1.945 \text{ [kg]} \frac{1.2 \cdot 10^5}{9.81 \cdot 10^5} = 0.238 \text{ [kg]}$$

4) Alla temperatura di  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  ed alla pressione di  $20 \text{ kg}_p/\text{cm}^2$ , una certa quantità di  $\text{N}_2$  occupa il volume di  $82.3 \text{ cm}^3$ . Quale sarà il volume occupato dall' $\text{N}_2$  a  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  ed alla pressione di  $15.4 \text{ kg}_p/\text{cm}^2$ ?

$$p_1 V_1 = R_1 M_1 T_1$$

$$p_2 V_2 = R_1 M_2 T_2$$

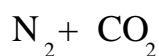
ma  $M_1 = M_2$  da cui, dividendo membro a membro, otteniamo:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2 p_1}{T_1 p_2}$$

$$V_2 = 82.3 \text{ [cm}^3\text{]} \frac{(30 + 273.15) \cdot 20}{(10 + 273.15) \cdot 15.5} = 113.7 \text{ [cm}^3\text{]}$$

notare che non è stato necessario convertire le pressioni mentre le temperature vanno trasformate in kelvin.

5) In un recipiente di volume  $V=80 \text{ dm}^3$  è contenuta una miscela di  $\text{N}_2$  e  $\text{CO}_2$  alla pressione totale di  $20 \text{ bar}$ . Si determini la massa di  $\text{CO}_2$ , la frazione ponderale di ciascun componente e la costante caratteristica della miscela sapendo che la massa di  $\text{N}_2$  vale  $0.5 \text{ kg}$  e la pressione parziale di  $\text{CO}_2$  è  $3.5 \text{ bar}$ .



$$V=80 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$$

$$p_{tot} = 20 \cdot 10^5 \text{ [Pa]}$$

$$p_{CO_2} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ [Pa]}$$

$$R_{1CO_2} = 0.189 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$R_{1N_2} = 0.2969 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$\begin{cases} p_{tot} = p_{CO_2} + p_{N_2} \\ p_{N_2} V = M_{N_2} R_{1N_2} T \\ p_{CO_2} V = M_{CO_2} R_{1CO_2} T \end{cases} \text{ tre eq. tre incognite: } p_{N_2}; M_{CO_2}; T$$

1) ricaviamo  $p_{N_2}$  dalla prima eq. e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} (p_{tot} - p_{CO_2})V = M_{N_2} R_{1N_2} T \\ p_{CO_2} V = M_{CO_2} R_{1CO_2} T \end{cases}$$

dalla prima eq. ricaviamo la temperatura:

$$T = \frac{(20 - 3.5) \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2] \cdot 80 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3]}{0.5 \text{ [kg]} \cdot 296.9 \text{ [J / kg K]}} = 889.2 \text{ [K]}$$

dalla seconda la massa di  $CO_2$ :

$$M_{CO_2} = \frac{3.5 \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2] \cdot 80 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3]}{189 \text{ [J / kgK]} \cdot 889.2 \text{ [K]}} = 0.167 \text{ [kg]}$$

e per la massa totale sar :

$$M_{misc} = M_{CO_2} + M_{N_2} = 0.667 \text{ [kg]}$$

ricaviamo ora le frazioni massiche dei componenti:

$$\pi_{N_2} = \frac{M_{N_2}}{M_{misc}} = \frac{0.5 \text{ [kg]}}{0.667 \text{ [kg]}} = 0.75 \Rightarrow \pi_{CO_2} = 0.25$$

ed infine

$$R_{1misc} = \sum_i \pi_i R_{1i} = 0.75 \cdot 0.2969 + 0.25 \cdot 0.189 = 0.27 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$m_{eq} = \frac{\mathcal{R}}{R_{1misc}} = \frac{8.314 \text{ [kJ / kmole K]}}{0.27 \text{ [kJ / kg K]}} = 30.79 \text{ [kg / kmole]}$$



### Esercitazione n° 3

#### Trasformazioni termodinamiche reversibili dei gas perfetti

1° principio :  $\delta Q = \delta L + dU$

nel caso di trasformazioni reversibili  $\delta Q = pdv + dU = pdv + c_v dT$

differenziamo l'equazione di stato dei g.p.  $pv = R_1 T$  ottenendo:

$$pdv + vdp = R_1 dT$$

teniamo anche presente la relazione di Mayer  $R_1 = c_p - c_v$

1)  $\delta Q = f(dT, dv) = pdv + c_v dT$

2)  $\delta Q = f(dT, dp) = R_1 dT - vdp + c_v dT = (c_p - c_v)dT - vdp + c_v dT = c_p dT - vdp$

3)  $\delta Q = f(dp, dv) = pdv + \frac{c_v}{R_1}(pdv + vdp) = \frac{R_1 + c_v}{R_1} pdv + \frac{c_v}{R_1} vdp = \frac{c_p}{R_1} pdv + \frac{c_v}{R_1} vdp$

altre espressioni utili equivalenti alla 3ª relazione:

$$R_1 = pv / T \Rightarrow \delta Q = \frac{T}{pv} c_p pdv + \frac{T}{pv} c_v vdp = T \left( c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} \right)$$

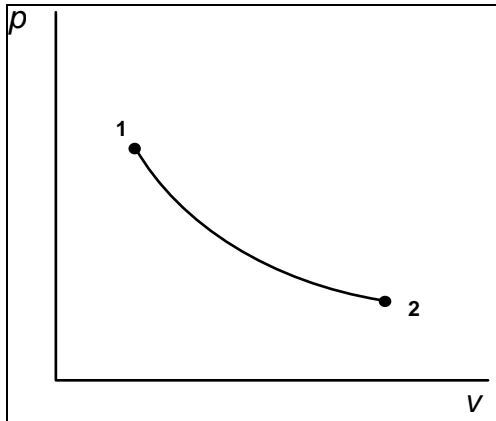
tenendo presente che  $k = c_p / c_v$  ho anche  $\delta Q = \frac{1}{k-1} (k pdv + vdp)$

*Trasformazioni fondamentali:*

Si ha una trasformazione termodinamica quando si determina un cambiamento nello stato di un sistema. Si dicono fondamentali quelle trasformazioni in cui rimane costante una delle grandezze termodinamiche che caratterizzano lo stato di un sistema, oppure se risulta nullo lo scambio di calore tra il sistema e l'esterno.

- isoterma  $T = \text{cost.} (dT = 0)$
- isocora:  $v = \text{cost.} (dv = 0)$
- isobara:  $p = \text{cost.} (dp = 0)$
- adiabatica  $\delta Q = 0$

Trasformazione isoterma (1-2)



$$dT = 0$$

$$pv = \text{cost.}$$

$$dU = c_v dT = 0$$

$$\delta Q = \delta L = pdv$$

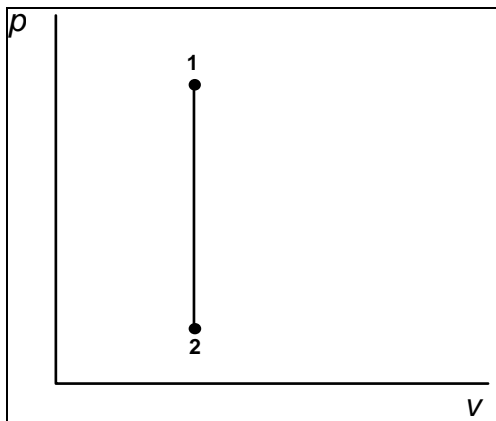
$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 pdv = \int_1^2 R_1 T \frac{dv}{v} =$$

$$= R_1 T \ln \frac{v_2}{v_1} = R_1 T \ln \frac{p_1}{p_2}$$

La convenzione circa il segno del lavoro scambiato indica che se  $p_1 > p_2$  ( caso in figura) allora  $L$  è positivo ed il lavoro esce dal sistema, se invece  $p_1 < p_2$  il lavoro entra nel sistema ,  $L$  è negativo.

Trasformazione isocora



$$dv = 0$$

$$p/T = \text{cost.}$$

$$dL = pdv = 0$$

$$dU = c_v dT; \quad \delta Q = dU + \delta L = c_v dT$$

$$L_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 c_v dT = U_2 - U_1$$

Nell'ipotesi di gas perfetto non è inclusa la posizione  $c_v$ ,  $c_p$  non dipendenti da  $T$ . In genere, ed anche nella realtà, quindi sia  $c_p$  che  $c_v$  dipendono dalla temperatura, ovvero sarà, anche in caso di g.p:

$$c_v = c_v(T)$$

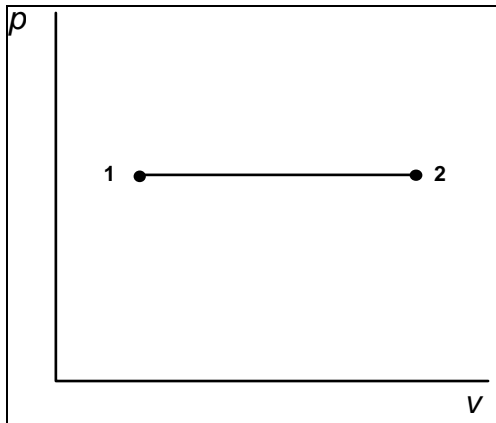
$$c_p = c_p(T)$$

ed anche

$$k = c_p / c_v = k(T)$$

Secondo l'ipotesi g.p. invece risulta  $R_1 = c_p - c_v = \text{costante}$ .

### Trasformazione isobara



$$dp = 0$$

$$T/v = \text{cost.}$$

$$dL = p dv$$

$$dU = c_v dT$$

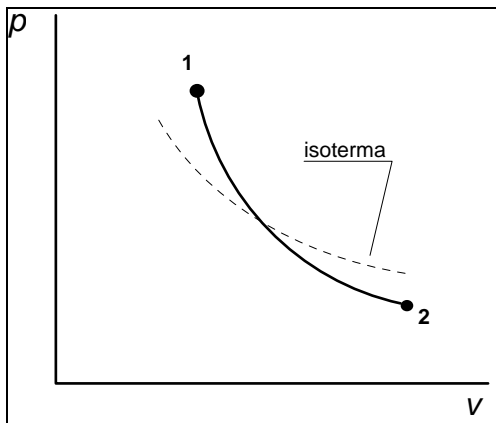
$$\delta Q = c_p dT - v dp = c_p dT$$

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p dv = p(v_2 - v_1) = R_1(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 c_v dT$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 c_p dT$$

### Trasformazione adiabatica



$$\delta Q = 0 :$$

$$\text{dalla } 1) \quad c_v dT = -p dv$$

$$2) \quad c_p dT = v dp$$

$$3) \quad c_p \frac{dv}{v} = -c_v \frac{dp}{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ovvero } \frac{dp}{p} = -k \frac{dv}{v} \quad (*)$$

integrando la (\*) nell'ipotesi che  $k$  sia costante, sarà:

$$\ln(p) = -k \ln(v) + \text{cost.}$$

$$\ln(p) = -\ln(v^k) + \text{cost.}$$

$$\ln(p) + \ln(v^k) = \ln(pv^k) = \text{cost.}$$

$$pv^k = \text{cost.}$$

$$dL = p dv = d(pv) - v dp = d(pv) + k p dv$$

$$(1-k)p dv = d(pv)$$

$$dL = d(pv)/(1-k) = R_1/(1-k) dT = -c_v dT$$

oppure

$$dL = -dU = -c_v dT$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$L_{1 \rightarrow 2} = (p_2 v_2 - p_1 v_1)/(1-k) = R_1(T_2 - T_1)/(1-k)$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -L_{1 \rightarrow 2}$$

## Trasformazione politropica

E' definita dalla equazione:  $pv^a = \text{cost.}$   $a \in [-\infty, +\infty]$

Il suo interesse è dovuto al fatto che le differenti trasformazioni fondamentali dei g.p. possono essere descritte dalla suddetta equazione, una volta che venga assegnato all'esponente a un opportuno valore.

$a=0$	$pv^0 = \text{cost}$	isobara
$a=1$	$pv^1 = \text{cost}$	isoterma
$a=k$	$pv^k = \text{cost}$	adiabatica
$a \rightarrow \infty$	$p^{1/a}v = \text{cost}$	isocora

Calore specifico per una politropica

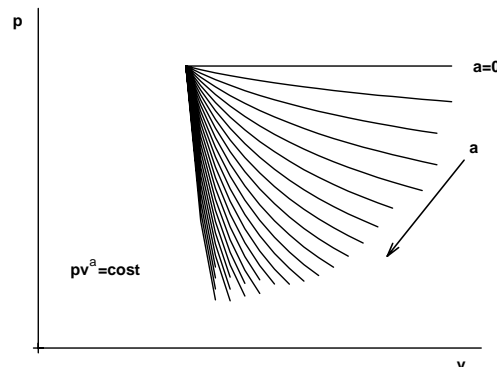
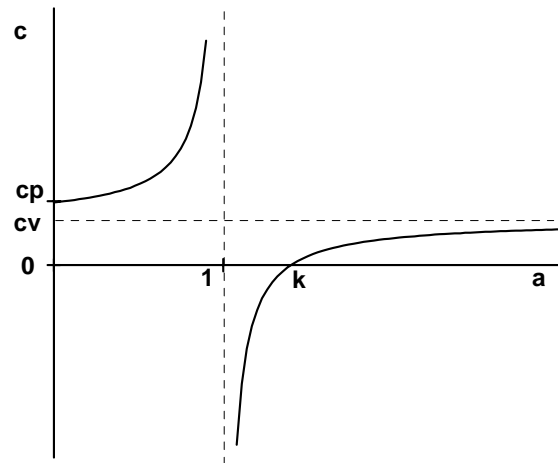
$$c = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdv}{dT} = c_v + R_1 \frac{pdv}{pdv + vdp} = c_v + R_1 \frac{1}{1 + \frac{vdp}{pdv}}$$

se  $pv^a = \text{cost.}$  ne consegue:  $v^a dp + a v^{a-1} pdv = 0$   
 $vdp + a pdv = 0$   
 $vdp/pdv = -a$

$$c = c_v + \frac{R_1}{1-a} = c_v + \frac{c_p - c_v}{1-a} = \frac{c_v - ac_v + c_p - c_v}{1-a}$$

$$c = c_v \frac{k-a}{1-a}$$

$a=0$	$c=c_p$	isobara
$a=1$	$c \rightarrow \infty$	isoterma
$a=k$	$c=0$	adiabatica
$a \rightarrow \infty$	$c=c_v$	isocora



### Ancora sulle politropiche

in precedenza abbiamo ottenuto

$$\frac{\delta Q}{dT} = c = c_v \frac{k - a}{1 - a}$$

ribattezzando  $c/c_v = \alpha$  avrò

$$\alpha = \frac{\delta Q}{dU} = \frac{k - a}{1 - a}$$

che rappresenta la frazione di variazione di energia interna dovuta a trasferimento di calore, infatti

$$\delta Q = \alpha dU$$

e naturalmente

$$dL = -(1 - \alpha)dU$$

In una trasformazione politropica ,quindi viene fissato (  $a$  è una costante e quindi lo è  $\alpha$  ,**se  $k$  si ipotizza costante**) un particolare rapporto fra calore e lavoro scambiati durante la trasformazione.

Le espressioni per gli scambi seguono allora come:

$$Q_{1,2} = \frac{k - a}{1 - a}(U_2 - U_1)$$
$$L_{1,2} = \frac{k - 1}{1 - a}(U_2 - U_1) = \frac{R_1}{1 - a}(T_2 - T_1)$$

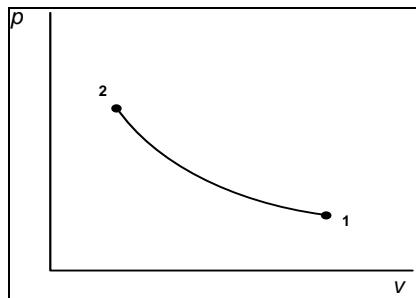
alle stesse espressioni si poteva giungere anche con procedimento analogo a quello utilizzato per la trasformazione adiabatica.

### Esercizio

Dell'ossigeno (  $V_1=0.36 \text{ m}^3$ ,  $T_1=220 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_1=4 \text{ bar}$  ) viene compresso reversibilmente a  $T=\text{cost.}$  sino ad un volume di  $0.06 \text{ m}^3$  . Valutare la massa di  $\text{O}_2$ , la pressione finale, la variazione di energia interna, il lavoro ed il calore scambiato nell'ipotesi di gas perfetto.

- 1) E' una isoterma
- 2) La massa è costante ( sistema chiuso )

$$M = \frac{p_1 V_1}{R_1 T} = \frac{4 \cdot 10^5 [\text{N} / \text{m}^2] 0.36 [\text{m}^3]}{8314 / 32 [\text{J} / \text{kg K}] 493.15 [\text{K}]} = 1.12 [\text{kg}]$$



sarà

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 4[\text{bar}] \frac{0.36}{0.06} = 24[\text{bar}]$$

Siccome

$$dU = c_v dT \quad \text{ma} \quad dT=0 \quad (\text{isoterma})$$
$$U_2 - U_1 = 0$$

Dal 1° principio risulta quindi  $L_{1,2} = Q_{1,2}$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p dv = \int_1^2 R_1 T \frac{dv}{v} = R_1 T \ln \frac{v_2}{v_1} = R_1 T \ln \frac{p_1}{p_2}$$
$$= \frac{8314}{32} [\text{J} / \text{kg K}] \cdot 493.15 [\text{K}] \cdot \ln \frac{1}{6} = -229572 [\text{J} / \text{kg}]$$

questo è il lavoro per unità di massa, vediamo ora nel caso in esame

$$L_{1,2}^* = M \cdot L_{1,2} = 1.12 [\text{kg}] \cdot (-229.6) [\text{kJ} / \text{kg}] \cong -257 [\text{kJ}] \quad \text{entra nel sistema (fatto sul sistema)}$$

$$Q_{1,2}^* = L_{1,2}^* = -257 [\text{kJ}] \quad \text{ceduto dal sistema}$$

Durante la compressione viene fatto lavoro dall'esterno sul sistema ed il sistema cede calore all'esterno.

### Esercizio

Un gas contenuto in un sistema *cilindro con stantuffo* avente massa  $M=0.25$  [kg] è sottoposto ad un processo di espansione reversibile per il quale la relazione fra pressione e volume è data da:

$$pv^n = \text{cost.}$$

La pressione iniziale vale  $p_1 = 3$  [bar]; il volume iniziale è  $V_1 = 0.1$  [m<sup>3</sup>] mentre quello finale è  $V_2 = 0.2$  [m<sup>3</sup>].

Determinare il lavoro ( in [kJ] ) scambiato durante il processo nel caso in cui:

$$(a) \ n=1.5; \quad (b) \ n=1.0; \quad (c) \ n=0$$

### ***Ipotesi:***

- Il gas costituisce un sistema chiuso.
- Trasformazione reversibile.
- L'unico lavoro scambiato con l'esterno avviene per mezzo del movimento della superficie.
- Il processo di espansione è descritto da una politropica.

Calcoliamo i volumi specifici iniziale e finale:

$$v_1 = \frac{V_1}{M} = \frac{0.1 [\text{m}^3]}{0.25 [\text{kg}]} = 0.4 [\text{m}^3 / \text{kg}] \quad v_2 = \frac{V_2}{M} = \frac{0.2 [\text{m}^3]}{0.25 [\text{kg}]} = 0.8 [\text{m}^3 / \text{kg}]$$

Il lavoro scambiato potrà essere calcolato come ( tr. reversibile):

$$L_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

Dall'eq. politropica ricaviamo p in funzione di v, ovvero  $p = \text{cost} / v^n$  per cui

$$L_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\text{cost}}{v^n} dv = \text{cost} \int_{v_1}^{v_2} v^{-n} dv = (\text{se } n \neq 1) = \text{cost} \left[ \frac{v^{1-n}}{1-n} \right]_{v_1}^{v_2} = \text{cost} \cdot \frac{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}{1-n}$$

il valore della costante si ottiene facendo di nuovo uso della eq. politropica:

$$\text{cost} = p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$$

per cui

$$L_{1,2} = \frac{p_2 v_2^n \cdot v_2^{1-n} - p_1 v_1^n \cdot v_1^{1-n}}{1-n} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n}$$

Questa espressione del lavoro è valida per ogni n **ad eccezione di n=1** (isoterma) ; in quest'ultimo caso avremo:

$$L_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\text{cost}}{v} dv = \text{cost} \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_1 v_1 \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_2 v_2 \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

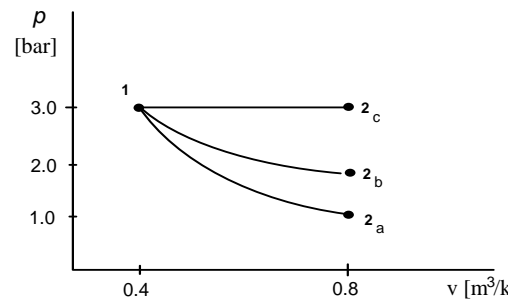
Ricaviamo la pressione finale nei 3 casi:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$$

(a)  $p_2 = 3[\text{bar}] \cdot (0.5)^{1.5} = 1.06[\text{bar}]$

(b)  $p_2 = 3[\text{bar}] \cdot (0.5) = 2[\text{bar}]$

(c)  $p_2 = 3[\text{bar}] \cdot (0.5)^0 = 3[\text{bar}]$



Ricaviamo infine il lavoro

(a)  $L_{1,2} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n} = \frac{(1.06 \cdot 0.8 - 3.0 \cdot 0.4)[\text{bar} \cdot \text{m}^3 / \text{kg}]}{-0.5} = 0.704 \left[ 10^5 \frac{\text{N} / \text{m}^2}{\text{kg}} \text{m}^3 \right]$

$$L_{1,2} = 70.4[\text{kJ} / \text{kg}] \quad L_{1,2}^* = L_{1,2} \cdot M = 70.4 \cdot 0.25 = 17.6[\text{kJ}]$$

(b)  $L_{1,2} = p_1 v_1 \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 3[\text{bar}] \cdot 0.4[\text{m}^3 / \text{kg}] \cdot \ln(2) = 0.8317 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$

$$L_{1,2} = 83.17[\text{kJ} / \text{kg}] \quad L_{1,2}^* = L_{1,2} \cdot M = 83.17 \cdot 0.25 = 20.79[\text{kJ}]$$

(c)  $L_{1,2} = p(v_2 - v_1) = 3[\text{bar}] \cdot (0.8 - 0.4)[\text{m}^3 / \text{kg}] = 1.2 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$

$$L_{1,2} = 120[\text{kJ} / \text{kg}] \quad L_{1,2}^* = L_{1,2} \cdot M = 120 \cdot 0.25 = 30[\text{kJ}]$$

## Esercitazione n° 4

### Sistemi aperti

#### *Richiami*

Un volume di controllo è una regione di spazio che viene utilizzata nello studio dei sistemi aperti. Il confine di questa volume, detto anche superficie di controllo, può essere fisso o deformabile rispetto ad uno specifico sistema di coordinate. Diversamente dai sistemi chiusi la massa può attraversare i confini del v.c. In conseguenza di ciò occorre sottolineare un'altra differenza fra c.v. e sistemi chiusi: in questi ultimi l'energia entra ed esce dal sistema per mezzo di scambi di calore e lavoro, nei v.c. bisogna tenere conto anche dell'energia associata alla massa che entra e che esce dal sistema ( questo porta alla introduzione dell'entalpia).

I volumi di controllo (sistemi aperti) sono introdotti per semplificare l'analisi di dispositivi quali turbine, pompe, compressori, ugelli, etc.

Nel seguito saranno considerati sistemi in regime permanente con un ingresso (1) ed una uscita (2).

#### Conservazione della portata

$$\left( \frac{Aw}{v} \right)_{\text{ingresso}} = \left( \frac{Aw}{v} \right)_{\text{uscita}}$$

oppure, chiamando (1) la sezione di ingresso e (2) quella di uscita:

$$G_1 = \rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2 = G_2 \quad [\text{kg} / \text{s}]$$

con  $G$ = portata massica [kg/s]

$w$ = velocità ( media nella sezione ) [m/s]

$\rho$ =  $1/v$  = massa specifica [kg/m<sup>3</sup>]

$A$ = area della sezione ortogonale alla velocità [m<sup>2</sup>]

#### Conservazione dell'energia

$$\dot{Q}_e - \dot{L}_e = G_2 \left( h_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2 \right) - G_1 \left( h_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 \right) [\text{W}] (\text{potenza})$$

$( h = u + pv )$

tenendo però conto del fatto che  $G_1=G_2=G$  e dividendo per tale portata, avremo:

$$Q_e - L_e = (h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) [\text{J/kg}] (\text{energia per unità di massa})$$

(potenza per unità di portata = energia per unità di massa)



Riscriviamo le 2 equazioni di bilancio ( massa ed energia)

$$1) \quad \rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2$$

$$2) \quad Q_e - L_e = (h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1)$$

$z$  = altezza asse sezione

$h = u + pv$  = entalpia

$Q_e$  = energia acquistata per mezzo di calore

$L_e$  = energia ceduta per mezzo di lavoro ( detto lavoro esterno netto; non comprende il lavoro di pulsione fatto dalla pressione in corrispondenza delle sezioni di ingresso e di uscita)

La convenzione dei segni è la solita :  $Q > 0$  entra nel sistema ,  $L > 0$  esce dal sistema.

Queste due equazioni, unitamente alla legge di stato dei g.p.

$$3) \quad p = R_1 \rho T$$

ed alla particolarizzazione per la specifica trasformazione analizzata, saranno i principali strumenti nella soluzione di un primo set di problemi sui sistemi aperti.

Siccome il calore specifico a pressione costante  $c_p$  non viene assunto indipendente dalla temperatura, i salti entalpici ( differenze di entalpia) non saranno valutati come

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

Piuttosto, i valori dell'entalpia in funzione della temperatura si estrarranno da opportune tabelle ( allegate).

Ricaviamo una espressione dell'energia interna dal 1° principio sist.chiusi. ( che naturalmente vale sempre, occorre fare però attenzione: il lavoro nei sist. aperti non c'entra niente con quello nei sistemi chiusi, mentre le altre quantità sono identiche )

$$u_2 - u_1 = Q_{1,2} - L_{1,2 \text{ chiusi}}$$

Nell'ipotesi di reversibilità

$$L_{1,2 \text{ rev chiusi}} = \int_1^2 p dv \quad (+)$$

per cui  $u_2 - u_1 = Q_{1,2} - \int_1^2 p dv$  oppure  $h_2 - h_1 = Q_{1,2} + \int_1^2 v dp$

Sostituendo nella (2) e tenendo presente che  $Q_e = Q_{1,2}$  si ottiene: (\*\*)

$$L_{\text{rev e}} = - \int_1^2 v dp - \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) - g(z_2 - z_1)$$

espressione collegata ( come vedremo ) al **teorema di Bernoulli**.

La (\*\*) non è altro che l'equivalente della (+), cioè un'espressione del lavoro nelle trasformazioni reversibili, questa volta per sistemi aperti.

Vediamo l'utilità della (\*\*) con un esempio.

Consideriamo un fluido in moto in un organo. Il fluido è soggetto ad un riscaldamento isobaro ideale ( int. rev.), con pareti rigide ( $L_e=0$ ) trascuriamo  $dz$ .

La eq. in termini termodinamici è

$$w dw + dh = \delta Q_{\text{reale}}$$

Mentre quella in termini meccanici

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0$$

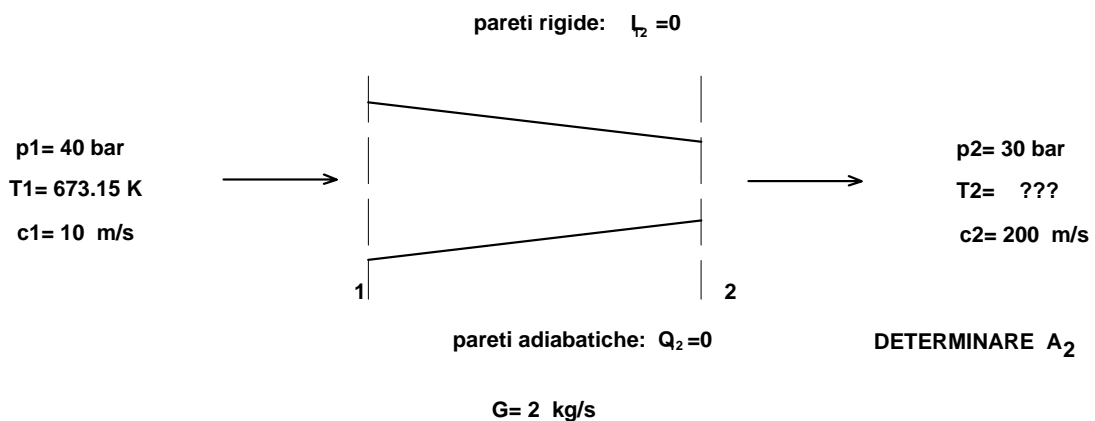
Si vede come dalla seconda emerge subito che se  $dp=0$  allora  $dw=0$

Si sottolinea che la (\*\*\*) e la (2) sono dette forme alternative dell'equazione dell'energia la prima in termini meccanici, la seconda in termini termodinamici, nella forma data, però, la (\*\*\*) vale solo in condizioni di reversibilità, mentre la (2) vale sempre.

### Esercizio 1

Dell'aria entra in un convergente in regime stazionario. Abbiamo nella sezione di ingresso  $p_1=40$  [bar],  $T_1= 400$  [°C],  $w_1= 10$  [m/s]. In uscita la pressione vale  $p_2= 30$  [bar] e la velocità è  $w_2= 200$  [m/s]. Calcolare  $A_2$  tenendo presente che: il convergente ha pareti rigide e termicamente isolate; la portata massica vale  $G = 2$  [kg/s]. Si consideri l'aria un g.p.

Facciamo uno schizzo con i dati rilevanti



Particolarizziamo le equazioni (1-3) per il caso in esame:

$$1) \quad \rho_2 w_2 A_2 = G$$

$$2) \quad 0 = (h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right)$$

infatti  $z_1=z_2$  ed inoltre  $Q_{e1,2}=0$ ;  $L_{e1,2}=0$

$$3) \quad p_2 = R_{1 \text{ aria}} \rho_2 T_2$$

L'area della sezione di uscita è ricavabile dalla (1) ma occorrerà dapprima ricavare  $\rho_2$ , tale quantità risulta dalla (3) se prima calcoliamo  $T_2$  e questo per mezzo dalle tavole dell'entalpia una volta calcolata  $h_2$  dalla eq.(2). Ovvero:

$$1) \quad A_2 = \frac{G}{w_2 \rho_2}$$

$$3) \quad \rho_2 = \frac{p_2}{R_1 T_2}$$

$$\text{e quindi} \quad A_2 = \frac{G R_1}{w_2 p_2} T_2 \quad (*)$$

dalla eq.(2) scriviamo:

$$h_2 = h_1 - \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right)$$

dalle tavole in corrispondenza di  $T_1 = 673.15$  K ricaviamo il valore dell'entalpia all'ingresso  $h_1$ . Se, come in questo caso, la temperatura in questione non è riportata si procede per interpolazione fra le due più vicine.

	$T$ [K]	$h$ [kJ/kg]
$T_{\text{inf}}$	600	$h_{\text{inf}}$ 608.5
$T_{\text{sup}}$	700	$h_{\text{sup}}$ 714.0

$$h_1 = h_{\text{inf}} + \frac{T_1 - T_{\text{inf}}}{T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}}} (h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}})$$

$$h_1 = 608.5 + \frac{673.15 - 600}{100} (714.0 - 608.5) \text{ [kJ / kg]}$$

$$h_1 = 685.7 \text{ [kJ/kg]} = 685700 \text{ [J/kg]}$$

ricaviamo allora  $h_2$  come:

$$h_2 = 685700 - 0.5(200^2 - 10^2) = 665750 \text{ [J/kg]} = 665.7 \text{ [kJ/kg]}$$

ricaviamo ora  $T_2$  con un procedimento analogo al precedente

$$T_2 = T_{\text{inf}} + \frac{h_2 - h_{\text{inf}}}{h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}}} (T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})$$

$$T_2 = 600 + \frac{665.7 - 608.5}{714.0 - 608.5} 100 = 654.2 \text{ [K]} = 381.1 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Siamo ora in grado di valutare l'area della sezione (2) tramite l'eq.(\*):

$$A_2 = \frac{G R_1}{w_2 p_2} T_2$$

$$A_2 = \frac{2 \text{ [kg / s]} 287 \text{ [J / kg K]}}{200 \text{ [m / s]} 30 \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2\text{]}} 654.2 \text{ [K]} \cong 6.26 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

Mentre per  $A_1$  si ricava:

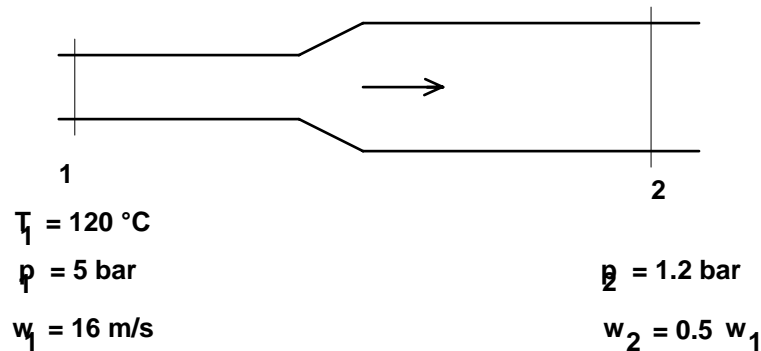
$$A_1 = \frac{2 \text{ [kg / s]} 287 \text{ [J / kg K]}}{10 \text{ [m / s]} 40 \cdot 10^5 \text{ [N / m}^2\text{]}} 673.15 \text{ [K]} \cong 9.66 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$$

### Esercizio 2

Dell'ossigeno (g.p.), temperatura di 120 [°C], pressione di 5 [bar], velocità 16 [m/s], viene laminato in una valvola di Joule-Thomson (orizzontale) fino alla pressione di 1.2 [bar]. Determinare in quale rapporto devono essere le aree delle sezioni del condotto affinché la velocità media del fluido a valle sia la metà di quella a monte della valvola.

Valutare lo stato del fluido all'uscita e la produzione entropica associata alla trasformazione.

Si consideri il processo adiabatico.



L'espansione di Joule-Thomson è una trasformazione tipicamente irreversibile, priva di scambi di calore e lavoro con l'esterno.

$$\rho_1 w A_1 = \rho_2 w A_2 / 2 = G \quad [\text{kg} / \text{s}]$$

avendo imposto  $w_1 = w$  ovvero

$$\frac{A_2}{A_1} = 2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (*)$$

Per ciò che riguarda l'energia avremo:

$$Q_e - L_e = 0 = (h_2 - h_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

ma  $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 96 [J / kg]$ , quindi  $h_2 = h_1 + 96 [J / kg]$

$$h_1 = 273.4 + 93.15/100(366.2 - 273.4) = 359.8 \text{ [kJ/kg]} \quad h_2 = 359.9 \text{ [kJ/kg]}$$

Quindi la temperatura di uscita è maggiore di quella all'ingresso, ma di una quantità trascurabile (circa 0.1 °C)

Dall'equazione di stato dei gas perfetti segue allora immediatamente:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = R_1 \rho_1 T \\ p_2 = R_1 \rho_2 T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

quindi, utilizzando la (\*) otteniamo:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2 p_1}{p_2} = \frac{10}{1.2} = 8.\bar{3}$$

### Esercizio 3

In un condotto rigido ( $L_e=0$ ), con sezione di ingresso uguale a quella di uscita, un fluido (aria) è soggetto a riscaldamento revers. Determinare la temperatura  $T_2$  d'uscita del fluido sapendo che  $T_1=300$  [K],  $w_1=1$  m/s e che  $Q_e=20$  [kJ/kg] e che per le pressioni all'ingresso ed all'uscita vale  $p_1=p_2=1$  [bar]. (**attenzione:** la trasformazione non è isobara:  $dp \neq 0$  e la sezione non è costante:  $dA \neq 0$ )

Dimostrare che se  $dp=0$  o  $dA=0$  la suddetta trasformazione è impossibile.

eq. di bilancio:

$$Q_e = (h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) \quad (1)$$

equazione di continuità (conservazione della portata) ricordando che  $A_1 = A_2$ :

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 \quad (2)$$

inoltre l'equazione di stato dei g.p., ricordando che  $p_1 = p_2$ , porge:

$$\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 \quad (3)$$

abbiamo quindi 3 equazioni nelle 3 incognite  $T_2, w_2, \rho_2$  (infatti  $h_2$  è funzione univoca di  $T_2$  mentre  $\rho_1$  è ricavabile da  $T_1$  e  $p$ ).

Ricaviamo  $c_2$  in funzione di  $T_2$  dalla (2) e dalla (3) e sostituiamo nella (1), ovvero:

$$w_2 = w_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = w_1 \frac{T_2}{T_1}$$

e quindi

$$Q_e = c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} w_1^2 \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right]$$

dove, per semplicità, invece di fare ricorso alle tabelle dell'entalpia facciamo l'ipotesi di  $c_p = \text{cost.}$  (ad es, per l'aria  $c_p = 1003$  J/kg K)

ora  $Q_e$  è noto,  $T_1$  e  $c_1$  anche. Siamo quindi in condizione di calcolare  $T_2$  risolvendo una eq. di secondo grado:

Riarrangiando i termini ho:

$$T_2^2 + \frac{2c_p T_1^2}{w_1^2} T_2 - \frac{2T_1^2}{w_1^2} [c_p T_1 + Q_e] - T_1^2 = 0$$

quindi

$$T_2 = -\frac{c_p T_1^2}{w_1^2} + \sqrt{\left( \frac{c_p T_1^2}{w_1^2} \right)^2 + \frac{2T_1^2}{w_1^2} [c_p T_1 + Q_e] + T_1^2}$$
$$T_2 = -\frac{1003 \cdot 300^2}{1} + \sqrt{\left( \frac{1003 \cdot 300^2}{1} \right)^2 + \frac{2 \cdot 300^2}{1} [1003 \cdot 300 + 20000] + 300^2} = 319.94 [\text{K}]$$

da cui anche

$$w_2 = w_1 \frac{T_2}{T_1} = 1 \frac{319.4}{300} = 1.0665 \text{ [m/s]}$$

inoltre  $\rho_1$  è ricavabile dalla eq. di stato

$$\rho_1 = \frac{p}{R_1 T_1} = \frac{10^5 \text{ [N / m}^2\text{]}}{289 \text{ [J / kg K]} \cdot 300 \text{ [K]}} = 1.153 \text{ [kg / m}^3\text{]}$$

mentre sarà:  $\rho_2 = \rho_1 \frac{T_1}{T_2} = 1.153 \cdot \frac{300}{319.94} = 1.081 \text{ [kg / m}^3\text{]}$

$dp=0$

$$\rho w dw + dp = 0$$

$$w = \frac{G}{\rho A}$$

se  $dp=0$  allora  $dw=0$  quindi ( siccome  $A_1=A_2$  ) dovrà essere  $\rho_1=\rho_2$  e, per l'eq. dei g.p.  $T_1=T_2$  in contrasto con l'eq. dell'energia che porge:

$$T_2=T_1 + Q_e/c_p$$

Non è possibile una isobara con trasferimento di solo calore se  $A_1=A_2$ .

$dA=0$ , ovvero  $A=\text{cost.}$

$$\rho w dw + dp = 0$$

$$\rho w = \frac{G}{A}$$

sostituendo la seconda nella prima ottengo

$$\frac{G}{A} dw + dp = 0$$

e , integrando avrò:

$$\frac{G}{A}(w_2 - w_1) = p_1 - p_2 = 0$$

quindi  $w_2=w_1$  quindi ( continuità )  $\rho_1=\rho_2$  etc.. Si perviene alla stessa situazione di prima.

Un trasferimento di solo calore in un condotto a sezione costante provoca sempre una variazione di pressione fra ingresso e uscita.

## Esercitazione n° 5

### Entropia (gas perfetti)

#### Richiami

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{int rev}} \quad dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{reale}} + \delta\sigma \quad (\text{prod. entropica})$$

$$\delta\sigma > 0 \quad \text{sempre}$$

eq.  $Tds$  ( sempre valide ):

$Tds = du + pdv$
$Tds = dh - vdp$

#### Diagramma entropico

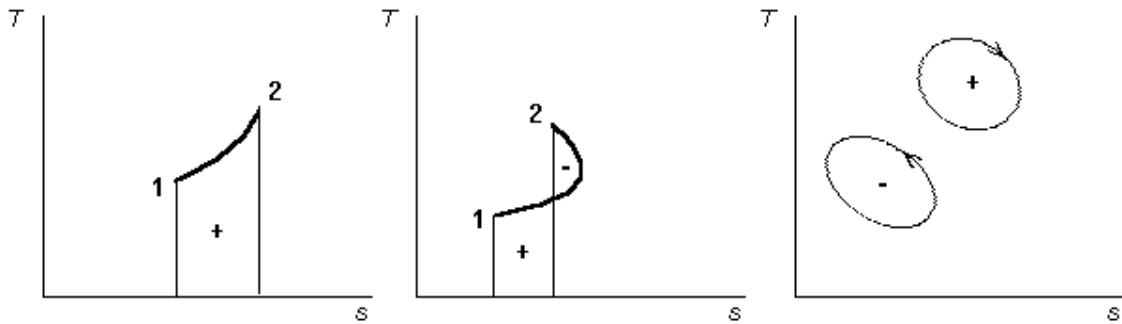
Porta in ordinate la temperatura ed in ascisse l'entropia.

Proprietà:

- Per una trasformazione reversibile (  $d\sigma = 0$  ) l'area *sottostante* la curva rappresenta il calore scambiato ( occorre fare attenzione al verso della trasformazione ):

$$Tds = \delta Q$$

$$\int_1^2 Tds = Q_{1,2}$$

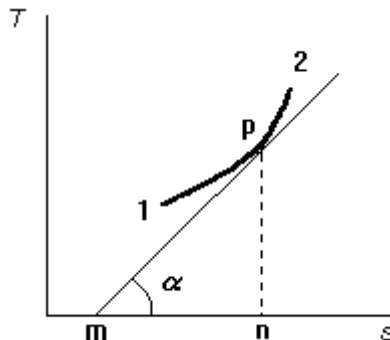


La curva che rappresenta una trasformazione ( rev. ) nel piano  $Ts$  ammette in ogni punto, come sottotangente, il calore specifico in quel punto. Di due curve concorrenti in un punto, la più ripida presenta il calore specifico più piccolo (in quel punto).

Sottotangente :  $\overline{mn}$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{pn}}{\overline{mn}} = \frac{T}{\overline{mn}} = \frac{dT}{ds}$$

$$\overline{mn} = \frac{T}{dT/ds} = \frac{Tds}{dT} = \frac{\delta Q_{rev}}{dT} = c \quad (\text{calore specifico})$$



### Entropia dei gas perfetti

$Tds = du + pdv$	<b>sempre valide</b>	$Tds = dh - vdp$
------------------	----------------------	------------------

Riscriviamo le equazioni  $Tds$  per un gas perfetto.

$ds = c_v(T) \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv$ $ds = c_v(T) \frac{dT}{T} + R_1 \frac{dv}{v}$ $s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + \int_1^2 c_v(T) \frac{dT}{T}$	<b>gas perfetti</b>	$ds = c_p(T) \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp$ $ds = c_p(T) \frac{dT}{T} - R_1 \frac{dp}{p}$ $s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \int_1^2 c_p(T) \frac{dT}{T}$
--	---------------------	--

se inoltre (raramente) ipotizziamo  $c_v = \text{cost.}$  ( implica  $c_p = \text{cost.}$  in un gas perfetto)

$s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$	<b><math>c_v, c_p = \text{cost.}</math></b>	$s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$
---	---	---

ed inoltre

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Nella pratica, comunque, per gas non perfetti, si usano tabelle che danno l'entropia in funzione di temperatura e pressione (caso del vapor d'acqua). Per gas che possono essere trattati come perfetti ( $H_2$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ ,  $N_2$ , aria ) si usa una tabella che riporta l'entropia alle varie temperature alla pressione di 1 bar ( $s_r$ ). Per le altre pressioni si usa la formula  $s = s_r - R_1 \ln(p)$  ( $p$  in bar).



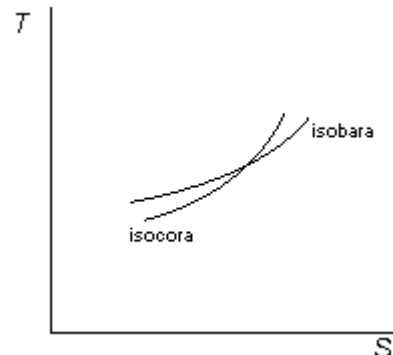
Le trasformazioni fondamentali nel piano (T,s)

Evidentemente le trasformazioni isoentropiche e isoterme saranno rappresentate da segmenti di retta rispettivamente verticali ed orizzontali. Vediamo più in dettaglio le trasformazioni isocore e isobare.

Riscriviamo le eq. Tds :

$ds = c_v(T) \frac{dT}{T} + R_1 \frac{dv}{v}$ <p style="text-align: center;">isocore (dv = 0)</p> <p style="text-align: center;">⇓</p> $ds = c_v(T) \frac{dT}{T}$ $\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_v(T)}$	gas perfetti	$ds = c_p(T) \frac{dT}{T} - R_1 \frac{dp}{p}$ <p style="text-align: center;">isobare (dp = 0)</p> <p style="text-align: center;">⇓</p> $ds = c_p(T) \frac{dT}{T}$ $\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p(T)}$
--	--------------	--

La pendenza di isocore ed isobare risulta quindi crescente con la temperatura (  $c_p$  e  $c_v$  non variano molto ) ed inoltre, essendo  $c_p > c_v$  (  $c_p - c_v = R > 0$  ) le isocore saranno più pendenti a parità di temperatura.



E' da sottolineare che queste ultime relazioni non valgono solo per i gas perfetti ma anche per gas reali, vapori surriscaldati e per tutti i fluidi per i quali si possano definire  $c_p$  e  $c_v$ . Infatti in generale si ha :

$Tds = du + pdv$ $Tds = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + pdv$ $ds = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{T} + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{T} + p \frac{dv}{T}$ $ds = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{T}$	sempre valide	$Tds = dh - vdp$ $Tds = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp - vdp$ $ds = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{T} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{T} - v \frac{dp}{T}$ $ds = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{T}$
---	---------------	---

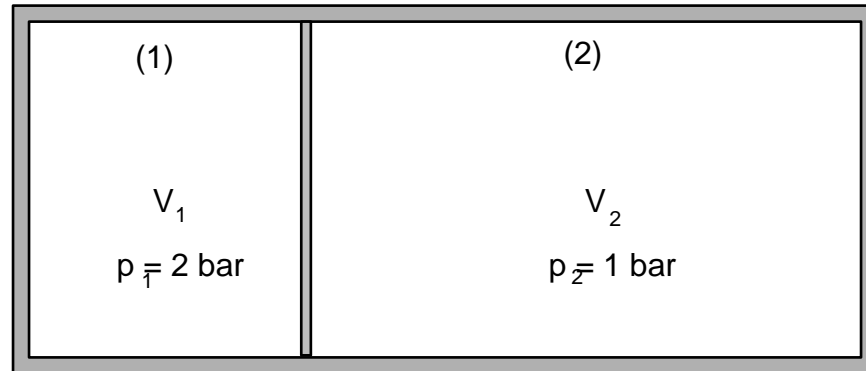
Ricordando la definizione di  $c_p$  e  $c_v$  si ottengono le relazioni precedenti.

### Esercizio

Consideriamo il sistema isolato costituito da due masse  $M$  uguali dello stesso gas: una a  $p_1=2$  bar e l'altra a  $p_2=1$  bar; entrambe alla stessa temperatura e divise da un pistone (buon conduttore) inizialmente bloccato e successivamente liberato. Ad equilibrio raggiunto (non importa come: rev o irrev.), sappiamo che i due sistemi saranno alla stessa pressione. Si richiede di determinare il valore della pressione di equilibrio.

L'energia interna globale ( identica per le due masse in quanto il pistone non è di materiale isolante) resterà immutata in quanto il sistema è isolato ( $Q=0, L=0 \Rightarrow \Delta U=0$ ).  
ovvero sarà:  $T_1=T_2=T$

$$Q=0 \quad L=0$$



In base alla condizione iniziale si ha  $V_1 = 1/2 V_2$

Nella condizione finale potremo scrivere:

$$p(V_1+V_2)=2MR_1T$$

e quindi

$$3pV_1=2MRT$$

Siccome

$$R_1MT=p_1V_1$$

sarà

$$3p=2p_1$$
$$p=2/3p_1 = 4/3 \text{ bar}$$

### Valutazione della variazione di entropia

Siccome  $dQ=0$  l'entropia del sistema nel suo complesso varierà ( se varierà ) solo a causa della produzione entropica, infatti:

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{reale}} + \delta \sigma$$

E' una classica trasformazione spontanea e quindi irreversibile.

Siccome sono noti gli stati iniziali e finali e si vuole determinare la variazione di una grandezza di stato, non ha alcuna importanza la trasformazione che porta dallo stato 1 allo stato 2. Ipotizziamo per comodità una trasformazione isoterma.

Per il sottosistema (1) si ha una variazione di pressione da  $p_1=2$  bar a  $p=4/3$  bar, mentre la temperatura rimane costante. Applichiamo allora la opportuna eq.  $Tds$ :

$$s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \int_1^2 c_p(T) \frac{dT}{T}$$

che per  $dT=0$  diviene

$$s_2 - s_1 = R_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

avremo allora

$$\Delta s_{(1)} = R_1 \ln \frac{2}{4/3} = R_1 \ln \frac{3}{2} = 0.405 \cdot R_1$$

con riferimento all'unità di massa.

Analogamente per il sottosistema (2) sarà

$$\Delta s_{(2)} = R_1 \ln \frac{1}{4/3} = R_1 \ln \frac{3}{4} = -0.287 \cdot R_1$$

Complessivamente, considerando la massa del sistema avremo:

$$\Delta S_{(tot)} = M\Delta s_{(1)} + M\Delta s_{(2)} = 0.118R_1M$$

maggiore di zero in accordo col 2° principio.

**Attenzione:** un errore banale è il seguente:

$$\Delta s_{(tot)} = \Delta s_{(1)} + \Delta s_{(2)} = 0.118R_1$$

e siccome la massa complessiva e pari a  $2M$  sarà:

$$\Delta S_{(tot)} = 2M\Delta s_{(tot)} = 0.236R_1M$$

L'errore sta nell'aver considerato  $\Delta s_{(1)}$  e  $\Delta s_{(2)}$  come variazioni di entropia per unità di massa del sistema complessivo mentre fanno in realtà riferimento all'unità di massa dei singoli sottosistemi.

### Esercizio

Dell'aria percorre una tubazione. In una certa sezione vengono misurate pressione temperatura e velocità e risulta:

$$p_1 = 8 \text{ bar} \qquad T_1 = 93 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (366.15 K)} \qquad w_1 = 100 \text{ m/s}$$

In un'altra sezione a valle la pressione risulta

$$p_2 = 5.9 \text{ bar}$$

Assumendo che l'esponente della politropica reversibile equivalente della trasformazione reale sia pari a 1.3 e che sia trascurabile lo scambio di calore, determinare in questa sezione la temperatura e la velocità dell'aria ( $T_2$  e  $w_2$ ). Determinare inoltre l'aumento di entropia  $\Delta\sigma$  dovuto all'irreversibilità della trasformazione.

Consideriamo il tratto di tubazione compreso fra le sezioni 1 e 2 come sistema aperto in regime permanente.

L'equazione di bilancio dei sistemi aperti riferita al kg massa è:

$$Q_e - L_e = (h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) \quad [\text{J / kg}]$$

Nel caso in esame  $Q_e=0$  ( scambio di calore trasc.),  $L_e=0$  perchè il tubo ha pareti rigide, infine  $g(z_2-z_1)=0$  perchè il condotto è orizzontale. In definitiva

$$(h_2 - h_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) = 0$$

E' richiesta la determinazione di  $w_2$  e  $T_2$ .

$w_1$  è nota ,  $h_1$  è ricavabile dalle tabelle essendo nota  $T_1$ , per ottenere  $h_2$  calcoliamo prima  $T_2$  utilizzando l'equazione della politropica ( che individua la particolare trasformazione in esame ).

Esprimiamo l'eq. politropica in una forma utile al nostro caso:  $Tp^{\frac{1-a}{a}} = \text{cost.}$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-a}{a}} \quad T_2 = T_1 \left( \frac{8}{5.9} \right)^{\frac{-0.3}{1.3}} = (273.15 + 93) \cdot 0.932 = 341.3 \text{ K}$$

$$T_2 = 68.15 \text{ }^\circ\text{C}$$

Dalla tabella dell'entalpia ricavo

$$h_1 = 300.6 + \frac{366.15 - 300}{100} (401.8 - 300.6) = 367.54 \text{ [kJ / kg]}$$

$$h_2 = 300.6 + \frac{341.3 - 300}{100} (401.8 - 300.6) = 342.4 \text{ [kJ / kg]}$$

quindi

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 2(h_1 - h_2)} = \sqrt{100^2 + 2 \cdot 1000(367.54 - 342.4)}$$

$$w_2 = 245.5 \text{ [m/s]}$$

Anche in questo esercizio la variazione di entropia è interamente dovuta a produzione entropica interna in quanto  $Q_{1,2}=0$  ( o meglio, in quanto  $\delta Q=0$  ).

Dalle tavole si ricava:

$$T_1=366.15 \text{ K} \quad s_{r1} = 6.873 + 66.15 / 100 \cdot (7.163 - 6.873) = 7.065 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$T_2=341.3 \text{ K} \quad s_{r2} = 6.873 + 41.3 / 100 \cdot (7.163 - 6.873) = 6.993 \text{ [kJ / kg K]}$$

che fanno riferimento alla pressione di 1 bar. I valori effettivi si ottengono mediante:

$$s = s_r - R_1 \ln(p)$$

da cui

$$p_1=8 \text{ bar} \quad s_1 = 7.065 - .287 \ln(8) = 6.468 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$p_2=5.9 \text{ bar} \quad s_2 = 6.993 - .287 \ln(5.9) = 6.483 \text{ [kJ / kg K]}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 0.0153 \text{ [kJ/kg K]}$$

## Appendice 1

Riscriviamo una delle eq.  $Tds$  nel caso  $c_p, c_v = \text{cost.}$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

dividendo per  $c_v$  e esponenziando otteniamo:

$$\frac{p_2}{p_1} \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^k = e^{(s_2 - s_1)/c_v} \quad (1)$$

fissato lo stato iniziale di una generica trasformazione, avremo in genere:

$$pv^k = C e^{s/c_v} \quad (C \text{ costante}) \quad (2)$$

per trasformazioni isoentropiche,  $S = \text{cost.}$ , (adiabatiche rev.) si ottiene la nota:

$$pv^k = C' \quad (C' \text{ costante})$$

Le equazioni 1 e 2 ( sotto le ipotesi di gas perfetto e  $c_p, c_v$  costanti ) sono l'equivalente della equazione di stato dei gas perfetti se si usa l'entropia come terza variabile termodinamica al posto della temperatura.

## Appendice 2

*L'energia interna di un gas perfetto è funzione della sola temperatura*

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \qquad ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv$$

vogliamo dimostrare che per un gas perfetto

$$u = u(T) \qquad \text{ovvero} \qquad \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$du = Tds - pdv$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v TdT + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T Tdv - pdv$$

da cui:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v T \qquad \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T T - p$$

per un noto teorema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T}$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} \right) = \left( \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v} \right) T \qquad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} \right) = \left( \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T} \right) T + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

segue

$$\left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

sostituendo

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T - p$$

per un gas perfetto ho

$$p = \frac{R_1 T}{v} \qquad \rightarrow \qquad \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R_1}{v} = \frac{p}{T}$$

ovvero:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

## Esercitazione n° 6

### Entropia II

#### *Sostanze incompressibili*

Ricordiamo che per le sostanze pure si ha in generale ( quando non è ipotizzabile il modello g.p. ), ad esempio:

$$u = u(T, v) \qquad h = h(T, p)$$

Per i liquidi ed i solidi viene solitamente assunto il modello di sostanza incompressibile. In pratica si assumono trascurabili le variazioni di volume specifico ( ovvero di densità). Come conseguenza abbiamo:

$$u = u(T) \qquad h = u(T) + pv$$

Per le sostanze incompressibili, inoltre

$$c_p(T) = c_v(T) = c(T)$$

infatti:

$$c_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v = \frac{du}{dT} \qquad c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial(u + pv)}{\partial T} \right|_p = \frac{du}{dT}$$

ed infine

$u_2 - u_1 = \int_1^2 c(T) dT$	$h_2 - h_1 = v(p_2 - p_1) + \int_1^2 c(T) dT$
--------------------------------	---

se poi assumiamo  $c$  costante si avrà

$$u_2 - u_1 = c(T_2 - T_1) \qquad h_2 - h_1 = c(T_2 - T_1) + v(p_2 - p_1)$$

Per ciò che riguarda l'entropia abbiamo visto che anche per i g. p. essa è funzione di due variabili, ad esempio  $(T, v)$ . Per le sostanze incompressibili si ha (eq.  $Tds$ ):

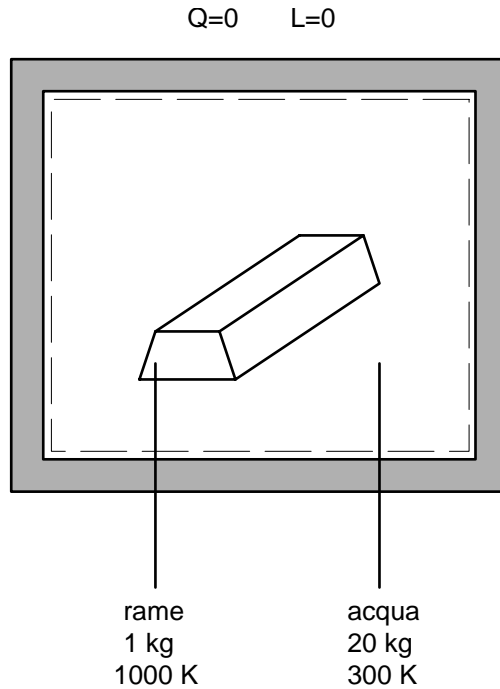
$Tds = dU = c(T)dT \quad \rightarrow \quad s_2 - s_1 = \int_1^2 c(T) \frac{dT}{T}$
--

$$s_2 - s_1 = c \ln \frac{T_2}{T_1} \text{ (se } c = \text{cost.)}$$

L'entropia è quindi funzione della sola temperatura per sostanze incompressibili.

**Esercizio**

Un lingotto di rame del peso di 1 kg, inizialmente ad una temperatura di 1000 K, è immerso in un recipiente contenente 20 kg di acqua ad una temp. iniziale di 300 K. Il recipiente è adiabatico. Determinare la temperatura finale di equilibrio del sistema e la variazione di entropia. Ipotizzare : a) solido e liquido incompressibili, b) calori specifici costanti pari a  $c_{H_2O} = 0.998$  [kcal/kg K]  $c_{Cu} = 0.091$  [kcal/kg K]



Siccome abbiamo a che fare con due distinti materiali utilizziamo  $U$  ed  $S$  piuttosto che le corrispondenti quantità per unità di massa  $u$  ed  $s$ .

Nel suo complesso, il sistema non scambia calore nè lavoro con l'esterno, di conseguenza:

$$dU = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{Cu} + \Delta U_{H_2O} = 0$$

ovvero

$$M_{Cu}c_{Cu}(T_{eq} - T_{Cui}) + M_{H_2O}c_{H_2O}(T_{eq} - T_{H_2Oi}) = 0$$

$$T_{eq} = \frac{M_{Cu}c_{Cu}T_{Cui} + M_{H_2O}c_{H_2O}T_{H_2Oi}}{M_{Cu}c_{Cu} + M_{H_2O}c_{H_2O}} \tag{1}$$

$$T_{eq} = \frac{M_{Cu}T_{Cui} + M_{H_2O}\frac{c_{H_2O}}{c_{Cu}}T_{H_2Oi}}{M_{Cu} + M_{H_2O}\frac{c_{H_2O}}{c_{Cu}}}$$

che è una media pesata delle Temp. rispetto alle capacità termiche ( $Mc$ ) dei componenti il sistema.



Passiamo all'entropia

$$\Delta S = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{reale}} + \sigma_{1,2}$$

siccome  $\delta Q=0$  tutta la variazione ( se presente ) sarà dovuta a sorgenti interne di irreversibilità ( produzione entropica ).

$$\sigma_{1,2} = \Delta S_{Cu} + \Delta S_{H_2O} = M_{Cu} c_{Cu} \ln \frac{T_{eq}}{T_{Cu i}} + M_{H_2O} c_{H_2O} \ln \frac{T_{eq}}{T_{H_2O i}}$$

$$T_{eq} = \frac{1[kg]1000[K] + 20[kg] \frac{0.998}{0.091} 300[K]}{1[kg] + 20[kg] \frac{0.998}{0.091}} = 303.2[K]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= 1[kg]0.091 \cdot 4.187[kJ / kg K] \ln \frac{303.2}{1000} + 20[kg] \cdot 0.998 \cdot 4.187[kJ / kg K] \ln \frac{303.2}{300} \\ &= -0.4547 + 0.8867 = 0.432[kJ / K] \end{aligned}$$

Il risultato è ovviamente positivo. Abbiamo infatti a che fare con un processo spontaneo, quindi irreversibile.

### Esercizio

Una massa  $m=2$  kg di aria (g.p.) è contenuta in un cilindro con stantuffo e si trova nelle condizioni iniziali  $p_1=1$  [bar] e  $v_1=0.9$  [m<sup>3</sup>/kg]. Essa subisce una trasformazione reversibile e rettilinea nel piano termodinamico T-S che la porta nello stato  $p_2=3$  bar e  $v_2=0.85$  m<sup>3</sup>/kg (cfr.Fig.1). Valutare gli scambi di calore e di lavoro per la trasformazione 1-2.

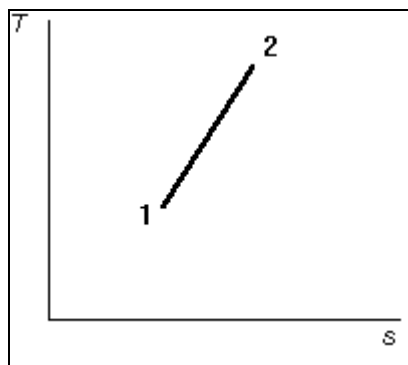


Fig.1

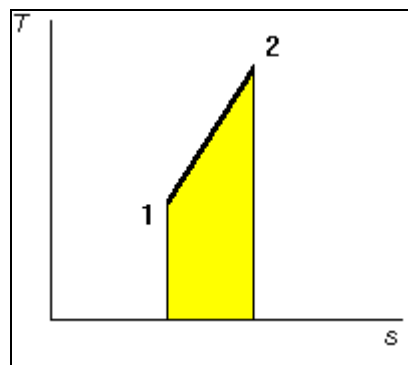


Fig.2

Siccome la trasformazione è reversibile avremo

$$Tds = \delta Q$$

Lo scambio di calore potrà essere quindi valutato come:

$$Q_{1,2} = \int_1^2 Tds$$

Essendo la trasformazione rettilinea tale integrale corrisponde all'area del trapezio di Fig.2, ovvero:

$$Q_{1,2} = (s_2 - s_1)(T_1 + T_2) / 2$$

Ricaviamo allora le temperature corrispondenti allo stato iniziale e finale utilizzando l'equazione di stato dei g.p., in seguito, attraverso le tavole, valuteremo la variazione di entropia.

$$T_1 = p_1 v_1 / R_1 = 1 \cdot 10^5 \cdot 0.9 / 287 = 313.6 [K]$$

$$T_2 = p_2 v_2 / R_1 = 3 \cdot 10^5 \cdot 0.85 / 287 = 888.5 [K]$$

dalle tavole

$$s_{r1} = 6.873 + (13.6/100)(7.163 - 6.873) = 6.913 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$s_{r2} = 7.891 + (88.5/100)(8.022 - 7.891) = 8.007 \text{ [kJ/kg K]}$$

quindi

$$s_1 = s_{r1}$$

$$s_2 = s_{r2} - R_1 \ln(p_2)$$

$$s_1 = 6.913 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$s_2 = 8.007 - 0.287 \cdot 1.0986 = 7.692 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$\Delta s = 0.779 \text{ [kJ/kg K]}$$

per cui

$$Q_{1,2} = (7.692 - 6.913)(313.6 + 888.5) / 2 = 468 [kJ / kg K]$$

Per calcolare il lavoro si utilizzerà il 1° principio:

$$L_{1,2} = Q_{1,2} - \Delta u$$

Cominciamo quindi col valutare la variazione di energia interna utilizzando le relative tavole

$$u_1 = 214.5 + (13.6/100)(287.0 - 214.5) = 224.36 \text{ [kJ/kg]}$$

$$u_2 = 592.8 + (88.5/100)(675.3 - 592.8) = 665.81 \text{ [kJ/kg]}$$

$$\Delta u = 441.45 \text{ [kJ/kg]}$$

infine

$$L_{1,2} = 468 - 441.45 = 26.25 \text{ [kJ/kg]}$$

Il lavoro risulta positivo, pertanto fatto dal sistema sull'esterno. Questo potrebbe sembrare strano in quanto il volume specifico relativo allo stato finale è minore di quello iniziale ed essendo la massa costante lo stesso discorso vale per i volumi. In altre parole lo stantuffo si abbassa ed il lavoro parrebbe quindi fatto dall'esterno sul sistema.

In realtà si sta commettendo un errore grave ma frequente. Partendo dalla conoscenza dello stato del sistema ( iniziale e finale ) si traggono conclusioni su una funzione **non di stato**, il lavoro. Questo, come più volte sottolineato non è ammesso per definizione: gli scambi di calore e di lavoro non sono legati in alcun modo con gli stati assunti dal sistema in quanto dipendono dalla particolare trasformazione a cui è soggetto il sistema. Un altro modo ( errato ) di ragionare potrebbe essere il seguente:

Il lavoro in una trasformazione reversibile è espresso da

$$L_{1,2} = \int_1^2 p dv$$

Ebbene, siccome è sempre possibile esprimere un tale integrale come:

$$\int_1^2 p dv = \bar{p}(v_2 - v_1)$$

e considerando il fatto che una  $\bar{p} < 0$  non ha senso e che  $(v_2 - v_1)$  è negativo, si conclude che  $L_{1,2}$  è minore di 0 e quindi fatto dall'esterno sul sistema.

L'errore è classico:

una volta introdotta la pressione media con un artificio matematico non possiamo più invocare considerazioni di tipo fisico per procedere nel nostro ragionamento. Valori di  $\bar{p}$  minori di zero sono perfettamente leciti e quindi nulla è possibile affermare circa il segno di  $L_{1,2}$ . Le figure 3 e 4 mostrano come sia possibile avere lavoro positivo o negativo in una trasformazione fra i medesimi stati iniziale e finale. Nel caso di fig. 4 si ha infatti

$$\bar{p} = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_1^2 p dv < 0$$

Nota: (p non è funzione univoca di v)

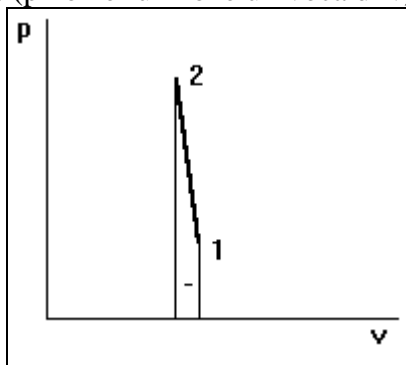


Fig.3

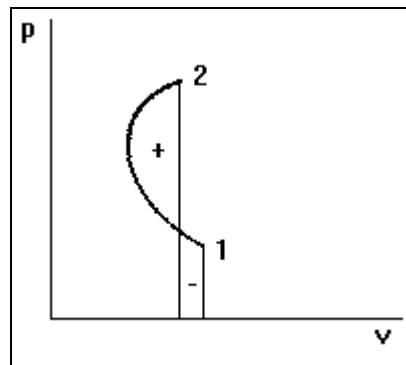


Fig.4

Vediamo di analizzare qualitativamente la nostra trasformazione assumendo  $c_v, c_p = \text{cost.}$  Utilizzando un valore medio di  $c_p$  pari a  $c_p = 1.053 \text{ [kJ/Kg K]}$  si ottiene:

$$\Delta s = 0.781 \text{ [kJ/kg K]} \quad Q = 469.6 \text{ [kJ/kg]} \quad \Delta u = 440.4 \text{ [kJ/kg]} \quad L = 29.2 \text{ [kJ/kg]}$$

valori simili a quelli ottenuti in precedenza; è quindi lecita un'analisi qualitativa.

Dalle eq  $Tds$  abbiamo (specificato lo stato iniziale)

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{v}{v_1} + c_v \ln \frac{p}{p_1}$$

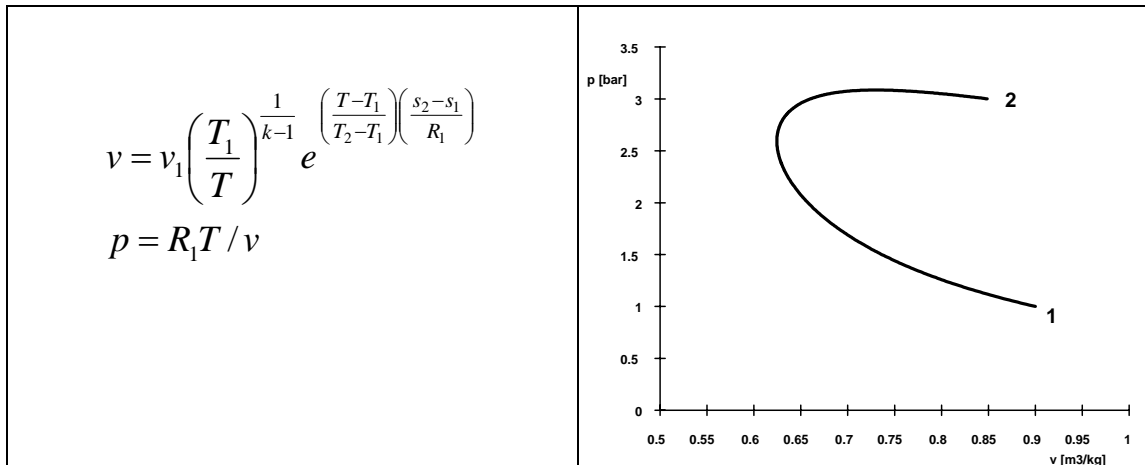
inoltre la nostra trasformazione è rettilinea nel piano T-S e quindi esprimibile come:

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{T_2 - T_1} (T - T_1)$$

avremo quindi:

$$\frac{s_2 - s_1}{p_2 v_2 - p_1 v_1} (p v - p_1 v_1) = c_p \ln \frac{v}{v_1} + c_v \ln \frac{p}{p_1}$$

Utilizzando  $T$  come parametro libero si ottiene la seguente formulazione parametrica:

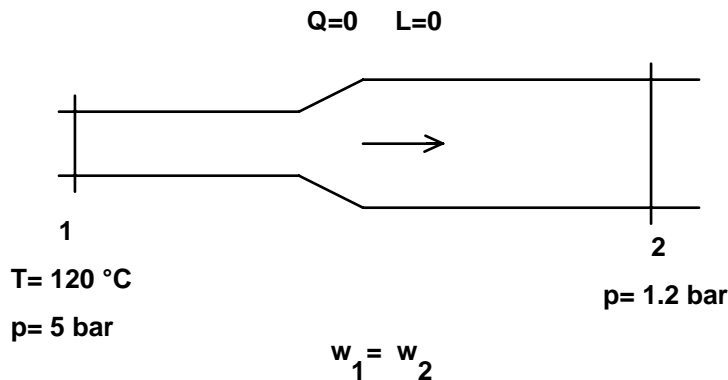


che conferma l'andamento qualitativo di fig.4.

**Esercizio**

Dell'ossigeno (g.p.) alla temperatura di 120 °C e pressione di 5 bar viene laminato in una valvola di Joule-Thomson fino alla pressione di 1.2 bar. Determinare in quale rapporto devono essere le aree delle sezioni del condotto affinché la velocità media del fluido a monte e a valle della valvola sia la stessa.

Valutare lo stato del fluido all'uscita e la variazione di entropia associata alla trasformazione.



L'espansione di Joule-Thomson è una trasformazione tipicamente irreversibile, priva di scambi di calore e lavoro con l'esterno.

Scriviamo l'equazione di bilancio per la massa nel caso in questione:

$$\rho_1 w A_1 = \rho_2 w A_2 = G \quad [\text{kg} / \text{s}]$$

avendo imposto  $w_1 = w_2 = w$  ovvero

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (*)$$

Per ciò che riguarda l'energia avremo:

$$Q_e - L_e = 0 = (h_2 - h_1)$$

essendo  $Q=0, L=0, w_1=w_2$  e  $g(z_2-z_1)=0$  in quanto il condotto è orizzontale ( oppure se le variazioni di quota vengono trascurate)

L'equazione dell'energia mette in evidenza che  $T_1=T_2 (=T)$  ( in quanto sono uguali le entalpie all'ingresso e all'uscita), quindi lo stato all'uscita è determinato.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti segue allora immediatamente:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = R_1 \rho_1 T \\ p_2 = R_1 \rho_2 T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

quindi, utilizzando la (\*) otteniamo:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{1.2} = 4.1\bar{6}$$

Valutiamo la variazione entropica, tutta dovuta ad irreversibilità interne in quanto  $\delta Q=0$ .

Le temperature all'ingresso e all'uscita sono uguali ( $T= 393.15$  K) quindi, dalle tavole:

$$s_{r1}=s_{r2}=s_r=6.422+93.15/100(6.691-6.422) = 6.673 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$s_1=6.673 - 0.256 \ln(5) = 6.261 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$s_2=6.673 - 0.256 \ln(1.2) = 6.626 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$\Delta s=0.365 \text{ [kJ/kg K]}$$

In effetti, per il calcolo della sola produzione entropica non era necessario l'uso delle tabelle in quanto , essendo  $T_1=T_2$ , si ha:

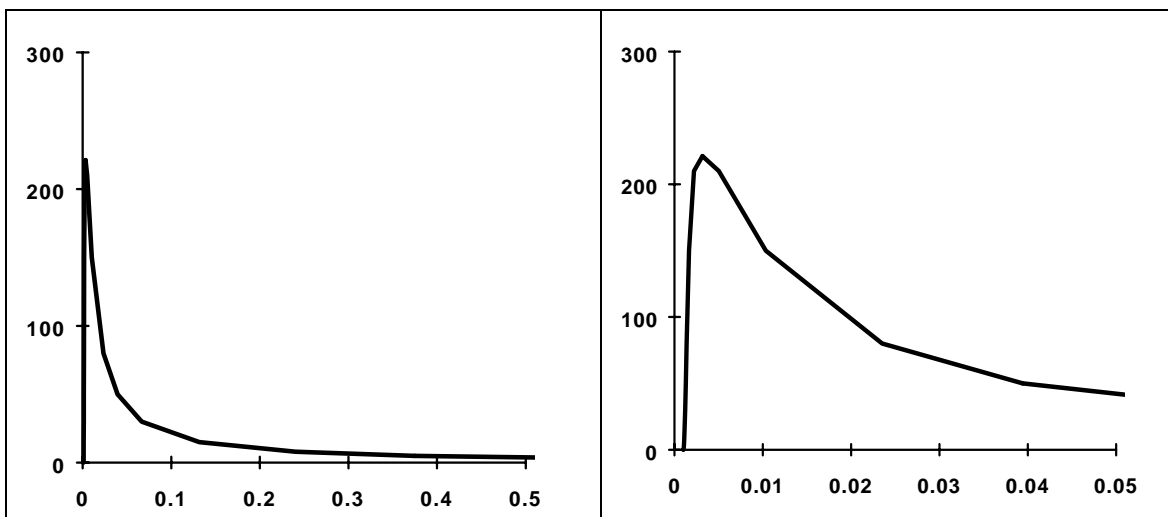
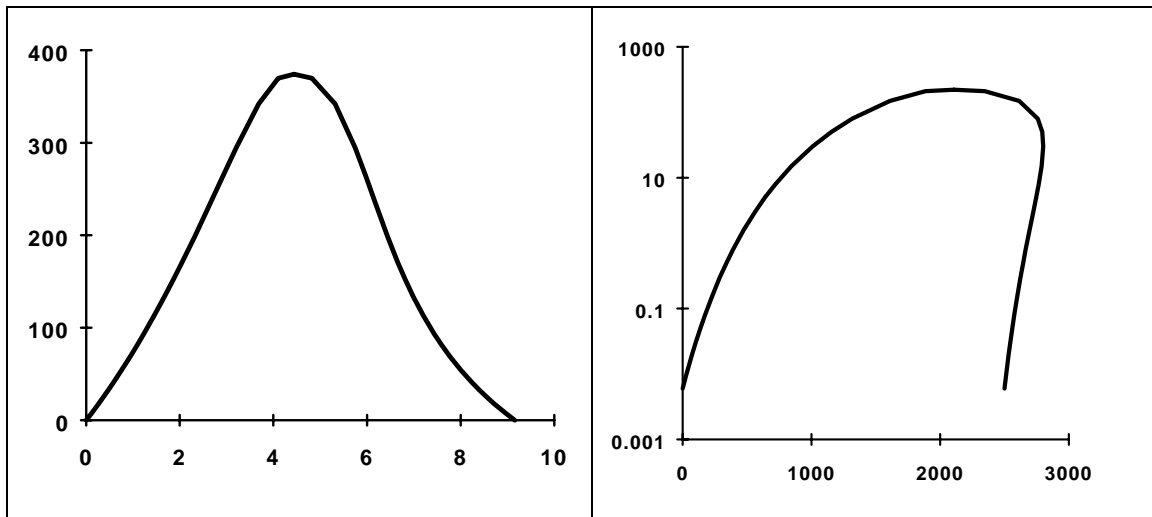
$$\Delta s=R_1 \ln(p_1/p_2) = 0.365 \text{ [kJ/kg K]}$$

## Esercitazione n° 7

### Vapori saturi e surriscaldati

#### *Richiami*

All'interno delle curve limite, nel campo del vapore saturo, pressione e temperatura non sono più variabili indipendenti ma sono legate biunivocamente fra di loro. In particolare se la pressione rimane costante anche la temperatura rimane costante (isotermobarica). Quindi pressione e temperatura da sole non individuano più lo stato del sistema.



Consideriamo il variare delle grandezze di stato su una isotermobarica, temperatura e pressione saranno ovviamente costanti,  $(p, T)$ .

volume specifico

$$v = \frac{V}{M} = \frac{V_v + V_l}{M_v + M_l} = \frac{v_v M_v + v_l M_l}{M_v + M_l} =$$
$$= \frac{M_l}{M_v + M_l} v_l + \frac{M_v}{M_v + M_l} v_v$$

ponendo  $\frac{M_v}{M_v + M_l} = x$ , titolo del sistema ( e quindi  $\frac{M_l}{M_v + M_l} = 1 - x$  )

si ha:  $v_x = v = (1-x) v_l + x v_v$

o anche

$$v = v_l + x \cdot (v_v - v_l)$$

A volte  $v_l$  è riportato come  $\sigma$  e  $v_v$  come  $\bar{v}$

Energia interna

Siccome è una grandezza estensiva sarà:

$$U = U_l + U_v$$
$$u \cdot M = u_l M_l + u_v M_v$$

e, dividendo per  $M$

$$u = (1-x)u_l + x \cdot u_v$$

ovvero

$$u = u_l + x \cdot (u_v - u_l)$$

A volte  $u_l$  è riportato come  $u_\sigma$

Stesso discorso per l'entalpia ( oppure si può ricavare dalla definizione)

$$h = h_l + x \cdot (h_v - h_l)$$

ovvero

$$h = h_l + x \cdot r$$

con  $r$  = entalpia di vaporizzazione a  $p$  costante.

Entropia

Dalle eq.  $Tds$  ho:

$$Tds = dh - vdp$$

ma  $dp=0$  ( isobara )

$$Tds = dh$$

integriamo fra la curva limite inferiore ed un generico stato saturo secondo una isoterma

$$T \int_l^x ds = \int_l^x dh$$

$$s = s_l + (h - h_l) / T$$

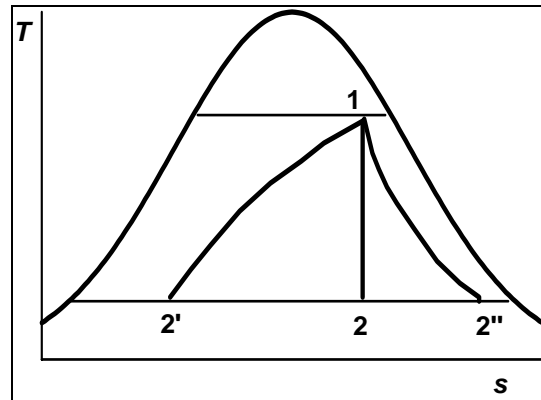
ovvero

$$s = s_l + x \cdot \frac{r}{T}$$

### Esercizio 1

1 kg di vapore a  $p_1=14$  bar e titolo  $x_1= 0.9$  è fatto espandere reversibilmente fino a  $p_2=1.4$  bar. Determinare le condizioni finali del vapore, entropia ed entalpia finali, nel caso di trasformazione:

- a) isoentropica (2)
- b) isocora (2')
- c) isoentalpica (2'')



Essendo la massa pari ad un chilogrammo usiamo quantità specifiche ( per unità di massa) e otteniamo direttamente i risultati.

Isoentropica ( $s_2=s_1$ )

$$s_1 = s_{l1} + x_1 \left( \frac{r}{T} \right)_1$$

$$p_1 = 14 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad s_1 = 2.2836 + 0.9 \cdot 4.1815 = 6.0469 \quad [kJ / kg K]$$

Per lo stato finale varrà

$$s_2 = s_{l2} + x_2 \left( \frac{r}{T} \right)_2$$

Ricordando che  $s_2=s_1$  (isoentropica) ricaviamo il titolo in (2) ( $p_2=1.4$  bar)

$$x_2 = \frac{s_1 - s_{l2}}{\left( \frac{r}{T} \right)_2}$$

$$p_2 = 1.4 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{6.0469 - 1.4109}{5.8356} = 0.794$$

Calcoliamo l'entalpia finale:

$$h_2 = h_{l2} + x_2 r_2$$

$$h_2 = 458.4 + 0.794 \cdot 2231.9 = 2231.5 [kJ / kg]$$

Isocora ( $v_2 \equiv v_1$ )

$$v_1 = v_{l1} + x_1 (v_{v1} - v_{l1})$$

$$p_1 = 14 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad v_1 = 1.1489 \cdot 10^{-3} + 0.9 \cdot (0.14073 - 1.1489 \cdot 10^{-3}) = 0.12677 [m^3 / kg]$$

per lo stato finale:

$$v_2 = v_{l2} + x_2 (v_{v2} - v_{l2})$$

ma  $v_2 = v_1$ , quindi



$$x_{2'} = \frac{v_1 - v_{l2'}}{v_{v2'} - v_{l2'}}$$

$$p_{2'} = 1.4 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad x_{2'} = \frac{0.12677 - 1.0513 \cdot 10^{-3}}{1.2363 - 1.0513 \cdot 10^{-3}} = 0.10$$

Calcoliamo l'entalpia e l'entropia finali:

$$h_{2'} = h_{l2'} + x_{2'} r_{2'}$$

$$h_{2'} = 458.4 + 0.1 \cdot 2231.9 = 681.6 \text{ [kJ / kg]}$$

$$s_{2'} = s_{l2'} + x_{2'} \left( \frac{r}{T} \right)_{2'}$$

$$s_{2'} = 1.4109 + 0.1 \cdot 5.8356 = 1.9945 \text{ [kJ / kg K]}$$

Isoentalpica ( $h_{2''} = h_1$ )

$$h_1 = h_{l1} + x_1 r_1$$

$$p=14 \text{ bar} \quad h_1 = 830.1 + 0.9 \cdot 1957.7 = 2592.0 \text{ [kJ / kg]}$$

$$h_{2''} = h_{l2''} + x_{2''} r_{2''}$$

ma  $h_{2''} = h_1$

$$x_{2''} = \frac{h_1 - h_{l2''}}{r_{2''}}$$

$$p_{2''} = 1.4 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad x_{2''} = \frac{2592.0 - 458.4}{2231.9} = 0.956$$

infine

$$s_{2''} = s_{l2''} + x_{2''} \left( \frac{r}{T} \right)_{2''}$$

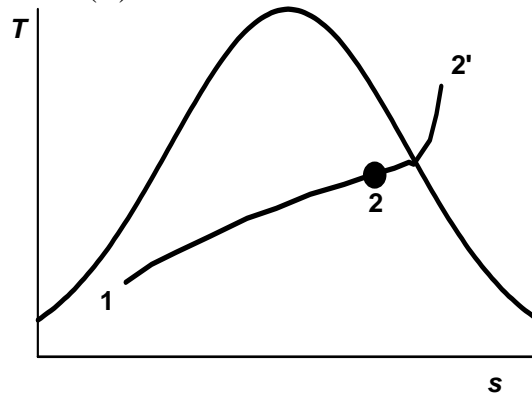
$$s_{2''} = 1.4109 + 0.956 \cdot 5.8356 = 6.9897 \text{ [kJ / kg K]}$$

I valori relativi ad un chilogrammo di vapore sono identici a quelli ottenuti ma occorre cambiare le unità di misura ( togliere kg dal denominatore).

### Esercizio 2

In un recipiente **rigido** da 1400 litri sono contenuti 3.56 kg di H<sub>2</sub>O. La temperatura è 30 °C. Calcolare la quantità di calore da somministrare al sistema per portarlo:

- alla temperatura di 140 °C (2)
- alla temperatura di 200 °C (2')



Si tratta evidentemente di una trasformazione **isocora**. Non essendoci scambi di lavoro con l'esterno, per il primo principio sarà:

$$Q_{1,2(2')} = U_{2(2')} - U_1$$

Il volume specifico del sistema è:

$$v_1 = v_2 = v_{2'} = \frac{V}{M} = \frac{1.4[m^3]}{3.56[kg]} = 0.393 [m^3 / kg]$$

Dalla tabella acqua e vapore in condizioni di saturazione ( Tab. 1) per  $T=30$  °C si ha:

$$v_l = 0.0010043 [m^3/kg] \quad v_v = 32.929 [m^3/kg]$$

siccome  $v_1$  è compreso fra questi 2 valori, lo stato iniziale è nella zone del vapore saturo. Per  $T=140$  °C troviamo:

$$v_l = 0.0010801 [m^3/kg] \quad v_v = 0.50849 [m^3/kg]$$

quindi anche nello stato (2) il vapore è saturo.

Per  $T=200$  °C troviamo invece:

$$v_l = 0.001565 [m^3/kg] \quad v_v = 0.12716 [m^3/kg]$$

$v_2$  risulta maggiore di  $v_v$ : il vapore è surriscaldato in (2'). Siamo fuori dalla campana.

Calcoliamo l'energia interna corrispondente agli stati (1), (2).

Il volume specifico nella zona del vapore saturo si esprime come:

$$v_x = v_l + x \cdot (v_v - v_l)$$

per cui

$$x = \frac{v_x - v_l}{v_v - v_l}$$

avremo allora:

$$x_1 = \frac{0.393 - 0.0010043}{32.929 - 0.0010043} = 0.012$$

$$x_2 = \frac{0.393 - 0.0010801}{0.50849 - 0.0010801} = 0.773$$

Passiamo alle energie interne specifiche corrispondenti:

Nella tabella considerata, quella in funzione della temperatura, l'energia non è tabulata.

Possiamo procedere in due modi equivalenti

1) calcolare l'entalpia e poi ricavare  $u$  dalla definizione di  $h$ :

$$u = h - pv$$

2) utilizzare l'altra tabella, quella in funzione della pressione. Qui però non troveremo proprio la temperatura voluta e dovremo quindi procedere ad una interpolazione.

Procediamo con entrambi i metodi.

$$h_x = h_l + x \cdot r \quad (\text{alla } T \text{ considerata})$$

per cui

$$h_1 = 125.7 + 0.012 \cdot 2430.7 = 154.87 \text{ [kJ / kg]}$$

$$h_2 = 589.1 + 0.773 \cdot 2144.0 = 2246.4 \text{ [kJ / kg]}$$

sarà poi:

$$u_1 = 154.87 - 0.393 \cdot 0.042415 \cdot 10^2 = 153.2 \text{ [kJ / kg]}$$

$$u_2 = 2246.4 - 0.393 \cdot 3.6138 \cdot 10^2 = 2104.4 \text{ [kJ / kg]}$$

la pressione si legge in corrispondenza della temperatura.

Proviamo ora il metodo 2)

Occorre, anzitutto, trovare per interpolazione i valori di  $u_l$  e  $u_v$ , corrispondenti alle temperature considerate (30 °C e 140 °C).

Le temperature più vicine sono rispettivamente 28.98, 32.9 e 138.88, 143.63.

$$u_{l1} = 121.4 + \frac{30 - 28.98}{32.9 - 28.98} (137.8 - 121.4) = 125.67 \text{ [kJ / kg]}$$

$$u_{v1} = 2415.3 + \frac{30 - 28.98}{32.9 - 28.98} (2420.6 - 2415.3) = 2416.68 \text{ [kJ / kg]}$$

$$u_{l2} = 583.9 + \frac{140 - 138.88}{143.63 - 138.88} (604.3 - 583.9) = 588.71 \text{ [kJ / kg]}$$

$$u_{v2} = 2548.2 + \frac{140 - 138.88}{143.63 - 138.88} (2552.7 - 2548.2) = 2549.26 \text{ [kJ / kg]}$$

siccome

$$u = u_l + x \cdot (u_v - u_l)$$

avremo:

$$u_1 = 125.67 + 0.012 \cdot (2416.68 - 125.67) = 153.2 \text{ [kJ / kg]}$$

$$u_2 = 588.71 + 0.773 \cdot (2549.26 - 588.71) = 2104.2 \text{ [kJ / kg]}$$

I risultati sono leggermente diversi (sbagliati) a causa delle interpolazioni e del maggior numero di arrotondamenti. Quindi, oltre ad essere più laborioso quest'ultimo metodo è anche più impreciso e quindi sconsigliato.

In definitiva si ottiene

$$Q_{1,2}^* = M \cdot (u_2 - u_1) = 3.56 \cdot (2104.2 - 153.2) = 6946.3 \text{ [kJ]}$$

Consideriamo ora lo stato (2'). Per calcolare l'energia interna dovremo usare le tavole relative al vapore surriscaldato. In queste l'energia non c'è. Calcolo quindi l'entalpia per interpolazione, poi la pressione sempre mediante interpolazione (infatti essendo fuori dalla zona di saturazione non c'è più corrispondenza fra temperatura e pressione), infine applico

$$u = h - pv$$

Calcolo di  $h_2$

L'interpolazione viene fatta utilizzando il volume specifico che nel nostro caso è pari a  $0.393 \text{ [m}^3/\text{kg]}$ , la colonna da considerare è quella corrispondente a  $200 \text{ }^\circ\text{C}$ . I valori di  $v$  più vicini a quello dato sono :  $0.35204 \text{ [m}^3/\text{kg]}$  e  $0.42496$ .

$$h_2 = 2849.27 + \frac{0.393 - 0.35204}{0.42496 - 0.35204} (2855.1 - 2849.7) = 2852.3 \text{ [kJ / kg]}$$

$$p_2 = 6 + \frac{0.393 - 0.35204}{0.42496 - 0.35204} (5 - 6) = 5.44 \text{ [bar]}$$

( attenzione a mettere le quantità corrispondenti, es. per la pressione (5-6) e non (6-5))  
sarà

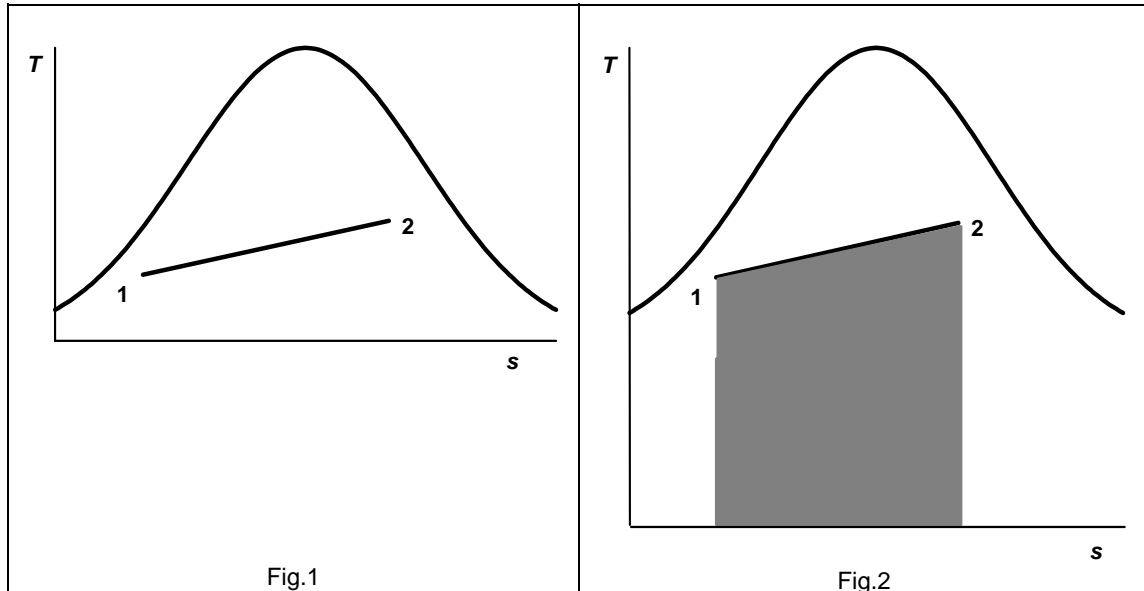
$$u_2 = 2852.3 - 5.44 \cdot 100 \cdot 0.393 = 2638.5 \text{ [kJ/kg]}$$

avremo infine

$$Q_{1,2}^* = M \cdot (u_2 - u_1) = 3.56 \cdot (2638.5 - 153.2) = 8847.7 \text{ [kJ]}$$

### Esercizio 3

Una massa  $m = 0.8 \text{ kg}$   $\text{H}_2\text{O}$  è contenuta in un cilindro con stantuffo e si trova nelle condizioni iniziali  $p_1 = 1.4 \text{ bar}$  e  $x_1 = 0.1$ . Essa subisce una trasformazione reversibile e rettilinea nel piano termodinamico T-S che la porta nello stato  $p_2 = 5 \text{ bar}$  e  $x_2 = 0.7$ . (cfr. Fig.1). Valutare gli scambi di calore e di lavoro per la trasformazione 1-2.



Siccome la trasformazione è reversibile avremo

$$Tds = \delta Q$$

Lo scambio di calore potrà essere quindi valutato come:

$$Q_{1,2} = \int_1^2 Tds$$

Essendo la trasformazione rettilinea tale integrale corrisponde all'area del trapezio di Fig.2, ovvero:

$$Q_{1,2} = (s_2 - s_1)(T_1 + T_2) / 2$$

(con le temperature in Kelvin)

La tavola *acqua e vapore in condizioni di saturazione* porge:

$p$ [bar]	$T$ [°C]	$s_l$ [kJ/kg K]	$r/T$ [kJ/kg K]	$s_v$ [kJ/kg K]
1.4	109.32	1.4109	5.8356	7.2465
5.0	151.85	1.8604	4.9588	6.8192

da cui

$$s_1 = 1.4109 + 0.1 \cdot 5.8356 = 1.9944 \text{ [kJ/kg K]}$$

$$s_2 = 1.8604 + 0.7 \cdot 4.9588 = 5.3315 \text{ [kJ/kg K]}$$

quindi

$$Q_{1,2} = (5.3315 - 1.9944)(382.5 + 425) / 2 = 1347.3 \text{ [kJ/kg]}$$

Per calcolare il lavoro utilizzeremo il 1° principio:

$$L_{1,2} = Q_{1,2} - \Delta u$$

Valutiamo la variazione di energia interna utilizzando le relative tavole:

$p$ [bar]	$T$ [°C]	$u_l$ [kJ/kg]	$u_v$ [kJ/kg]
1.4	109.32	458.3	2517.2
5.0	151.85	639.6	2560.2

$$u_1 = 458.3 + 0.1(2517.2 - 458.3) = 664.2 \text{ [kJ/kg]}$$

$$u_2 = 639.6 + 0.7(2560.2 - 639.6) = 1984.0 \text{ [kJ/kg]}$$

$$\Delta u = 1319.8 \text{ [kJ/kg]}$$

infine

$$L_{1,2} = 1347.3 - 1319.8 = 27.5 \text{ [kJ/kg]}$$

Il lavoro risulta positivo, pertanto fatto dal sistema sull'esterno. Moltiplichiamo per la massa ( 0.8 Kg) in modo da ottenere quantità complessive piuttosto che specifiche.

$$Q_{1,2}^* = 1077.8 \text{ [kJ]}$$

$$\Delta U = 1055.8 \text{ [kJ]}$$

$$L_{1,2}^* = 22 \text{ [kJ]}$$

#### Esercizio 4

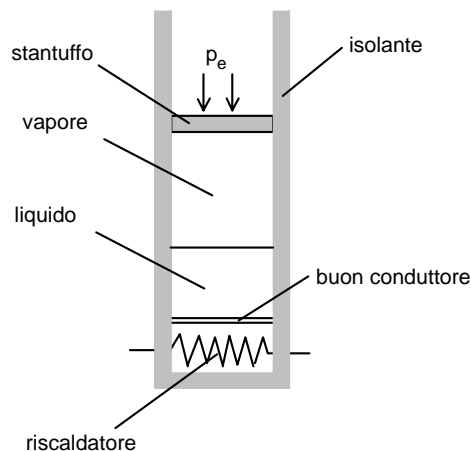
Un massa pari ad 0.5kg di H<sub>2</sub>O (liquido +vapore,  $x=0.1$ ), è contenuta in un cilindro con stantuffo mobile e fornito di un riscaldatore come da figura. Sullo stantuffo agisce una pressione esterna costante pari a 1 atm.

Calcolare il volume occupato dalla miscela e la sua temperatura.

Alla miscela è fornita, mediante il riscaldatore, una quantità di calore pari a 400 kJ.

Determinare il lavoro compiuto dal sistema sull'esterno.

Determinare inoltre la massa d'acqua evaporata, il volume finale occupato dalla miscela, la sua entropia.



Dalle tavole  $T_1=100$  °C

Inoltre  $v_1 = v_l + x_1(v_v - v_l) = 0.1682 \quad [m^3 / kg]$

Per cui  $V_1 = Mv_1 = 0.084 \quad [m^3]$

$$U_2 - U_1 = Q_{1,2} - Le_{1,2}$$

$$M[u_l + x_2(u_v - u_l) - u_1 - x_1(u_v - u_l)] = Q_{1,2} - p_e(V_2 - V_1)$$

$$M(x_2 - x_1)(u_v - u_l) = Q_{1,2} - p_e M(x_2 - x_1)(v_v - v_l)$$

massa evaporata

$$M(x_2 - x_1) = \frac{Q_{1,2}}{[(u_v - u_l) + p_e(v_v - v_l)]} = \frac{400}{2087.5 + 101.3 * 1.672} = 0.1772 \quad [kg]$$

titolo

$$x_2 = x_1 + \frac{0.1772}{M} = 0.4546 \quad ; v_2 = v_l + x_2(v_v - v_l) = 0.761 \quad [m^3 / kg];$$

$$V_2 = Mv_2 = 0.38 \quad [m^3]$$

$$Le_{1,2} = p_e(V_2 - V_1) = 30 \quad [kj]$$

$$S_2 = M \left[ s_l + x_2 \left( \frac{r}{T} \right) \right] = 2.028 \quad [kj / K]$$