

ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA

In questo capitolo vengono introdotti elementi di termofluidodinamica per lo studio del moto di fluidi comprimibili in condotti. Utilizzando una rappresentazione del moto monodimensionale, viene analizzato il deflusso in condotti a regime permanente, anche in presenza di notevoli differenze di temperatura. Viene inoltre esaminato il deflusso adiabatico in condotti a sezione variabile.

11.1 Introduzione

In molti processi tecnici si realizzano scambi energetici che coinvolgono un fluido in movimento. Al moto del fluido è generalmente associato un trasferimento di energia tra i componenti del sistema energetico e tra questi e l'esterno: il fluido assume la funzione di elemento vettore di energia. In questo capitolo ci si propone di esaminare gli aspetti fondamentali della termodinamica del deflusso dei fluidi, in particolare nei condotti, e cioè di studiare le relazioni di scambio (termico e dinamico) tra il sistema e l'esterno, per un fluido in moto, in condizioni semplificate.

Lo studio del moto nei condotti e dell'efflusso da aperture (luci ed ugelli) è impostato su tre equazioni di cui una esprime la conservazione della massa (continuità), un'altra esprime il principio della conservazione della quantità di moto e la terza il bilancio dell'energia. Quest'ultima può assumere due forme: una è dovuta a Bernoulli e può essere dedotta in base a ragionamenti puramente meccanici in particolari condizioni, l'altra è ottenuta considerando sia gli scambi di lavoro, sia quelli di calore, con le ipotesi già introdotte nel cap. 5.

Lo studio analitico del moto dei fluidi è svolto in dettaglio dalla Meccanica dei fluidi, che tuttavia fa quasi sempre riferimento a fluidi incomprimibili. Nella Termodinamica applicata occorre invece considerare le variazioni di volume del fluido e sovente le quantità di calore scambiate con l'esterno; occorre cioè considerare le trasformazioni termodinamiche subite dal fluido.

11.2 Schematizzazione del moto ed equazioni fondamentali di conservazione

La fenomenologia del moto dei fluidi è assai complessa e può essere descritta analiticamente mediante modelli semplificati. L'approccio che verrà qui seguito ricorre ad una rappresentazione che considera un processo ideale globalmente equivalente a quello reale, pur discostandosene anche sensibilmente nei particolari. Si immagina che il moto si sviluppi mediante *vene fluide* o *filetti di corrente*, in cui sono nulle le componenti della velocità normali alla superficie laterale di contorno.

Si definiscono due concetti: seguendo il moto di una particella fluida nel tempo si ottiene la *traiettoria* del punto-massa che la rappresenta, analizzandone il vettore velocità si definisce *linea di corrente* quella linea che ammette in ogni punto come tangente lo stesso vettore. Nelle condizioni del regime permanente la traiettoria coincide con la linea di corrente. Per *vena fluida* o *filetto di corrente* elementare si intende l'insieme delle traiettorie che

presentano una sezione trasversale di area minima compatibile con la esecuzione delle misure fisiche interessanti, in particolare, di velocità, pressione e temperatura. In qualunque sezione trasversale di un filetto di corrente la velocità (che è normale alla sezione stessa), la pressione, la temperatura ed il volume specifico sono supposti costanti. Il modello di riferimento è dunque *monodimensionale* ed assume condizioni di *regime permanente termodinamico e di massa*.

Considerando un filetto di corrente in regime permanente, la massa di fluido che attraversa, nell'unità di tempo, una qualunque sezione trasversale di area A è costante, si ha quindi:

$$wA\rho = \text{costante} \quad (11.1)$$

se w è la velocità e ρ la densità del fluido. L'equazione esprime la *conservazione della massa*. Con riferimento alla portata ponderale, detto γ il peso specifico, sarà:

$$wA\gamma = \text{costante}$$

Per due sezioni distinte 1 e 2 si avrà:

$$w_1 A_1 \rho_1 = w_2 A_2 \rho_2$$

Le relazioni sopra scritte possono applicarsi anche a vene fluide di sezione trasversale finita considerando i valori medi della velocità e della densità nella sezione generica. Infine, l'equazione di continuità (11.1) può scriversi in forma differenziale come:

$$\frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (11.2)$$

L'equazione di *conservazione della quantità di moto*, nelle condizioni sopra precisate, assume una forma semplificata che può ottenersi facilmente se si considera un elemento fluido, costituito dalla massa m (compresa tra le sezioni 1 e 2) più la massa dm che attraverserà la sezione 1 nel tempo $d\tau$. Nello stesso tempo $d\tau$ una pari massa dm attraverserà la sezione 2 e pertanto la variazione della quantità di moto dell'elemento fluido di massa $m + dm$ risulterà uguale al prodotto della massa dm per la differenza tra le velocità nelle sezioni 1 e 2. Tale variazione della quantità di moto dovrà eguagliare l'impulso delle forze agenti sull'elemento fluido nel tempo $d\tau$:

$$\sum F d\tau = dm (w_2 - w_1) \quad \text{ovvero} \quad \sum F = \dot{m} (w_2 - w_1) \quad (11.3)$$

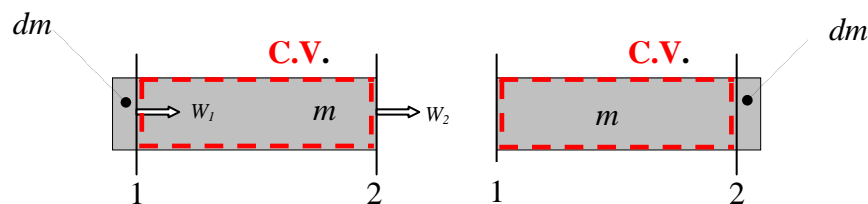


Fig. 11.1. Conservazione della quantità di moto a regime permanente.

avendo indicato con $\sum F$ la risultante delle forze agenti sull'elemento nella direzione del moto e con \dot{m} la portata in massa del fluido stesso.

Alle precedenti equazioni di conservazione si associa l'*equazione dell'energia*, nella formulazione del I principio già ottenuta per un volume di controllo e di seguito riscritta in forma più idonea allo studio delle trasformazioni relative ai fluidi in movimento. L'espressione che così si ottiene è nota come equazione di Bernoulli.

11.3 Equazione di Bernoulli

Tra le sezioni estreme di un elemento di un filetto di corrente può applicarsi l'equazione di bilancio dei sistemi aperti a regime permanente, trattando come volume di controllo il volume che racchiude l'elemento medesimo. In termini differenziali e con riferimento all'unità di massa, l'equazione ricordata si scrive:

$$dQ - dL_e = dH + \frac{dw^2}{2} + gdz \quad (11.4)$$

La (11.4) è pertanto l'equazione fondamentale del deflusso permanente in una sola dimensione e per un sistema a composizione chimica costante.

Notando che $dH = TdS + vdp$, la precedente diventa:

$$dQ - dL_e = dQ + TdS_s + vdp + \frac{dw^2}{2} + gdz$$

da cui :

$$dL_e + TdS_s + vdp + \frac{dw^2}{2} + gdz = 0$$

Esprimendo meccanicamente il termine dissipativo TdS_s posto uguale a dL_a (termine dissipativo di I specie riferito al fenomeno attrito), si ricava:

$$dL_e + dL_a + v dp + \frac{dw^2}{2} + g dz = 0 \quad (11.5)$$

in cui compaiono termini energetici propri del sistema, termini di scambio energetico e termini di dissipazione. La (11.5) viene ancora formalmente modificata per renderla più idonea alla soluzione dei problemi connessi con il moto dei fluidi, in particolare nei condotti.

Si noti che un qualunque lavoro, interessante l'unità di massa, può essere espresso mediante il prodotto del volume specifico del fluido per una opportuna pressione differenziale dp' e ciò per omogeneità dimensionale. Si tratterà poi di determinare il valore di tale pressione differenziale, in generale diversa dalla variazione di pressione attuale subita dal fluido in moto. Una pressione differenziale è inoltre sempre rappresentabile come prodotto del peso specifico γ per l'altezza di una colonna di fluido dh' che con il suo peso equilibra quella pressione. Per il lavoro esterno netto elementare si può quindi porre:

$$dL_e = v dp_e = v \gamma dh_e = g dh_e$$

Analogamente per il lavoro di attrito:

$$dL_a = v dp_a = v \gamma dh_a = g dh_a$$

Sostituendo le precedenti nella (11.5) e dividendo per g si ottiene infine:

$$dh_e + dh_a + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0 \quad (11.6)$$

Tra due sezioni 1 e 2 distinte, sempre nelle condizioni di regime permanente, si ha:

$$(h_e)_{1,2} + (h_a)_{1,2} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w^2_2 - w^2_1}{2g} + z_2 - z_1 = 0 \quad (11.7)$$

in cui i termini $(h_e)_{1,2}$ e $(h_a)_{1,2}$ caratterizzano l'elemento fluido compreso tra le sezioni dette. L'equazione caratterizzante il moto è così ridotta ad una somma di *carichi differenziali*, dimensionalmente lunghezze. Il *carico* essendo l'altezza equivalente, cioè l'altezza di una colonna di fluido in moto equilibrante la pressione differenziale che corrisponde al termine energetico (eventualmente dissipativo) o di scambio, considerato.

La (11.6) è detta *equazione di Bernoulli generalizzata*, in notazioni differenziali; ha significato energetico in riferimento all'unità di peso del fluido defluente. I termini che in essa compaiono vengono così denominati:

- dh_e carico *motore* e rappresenta un termine effettivo di scambio (con l'esterno);
- dh_a carico *d'attrito*, termine di dissipazione;
- $\frac{dp}{\gamma}$ carico *piezometrico* (da piezometro, misuratore di pressione), corrispondente all'effettiva variazione di pressione nel fluido;
- $\frac{dw^2}{2g}$ carico *cinetico*;
- dz carico *gravitazionale*, variazione di quota effettiva.

Si noti che il termine $\frac{dp}{\gamma} = \frac{vdp}{g}$ non è una energia di pressione, la sua origine è:

$$vdp = \frac{dp}{\rho} = dH - TdS = dU + d(pv) - dQ - TdS_s$$

contiene dunque una componente dell'energia interna termodinamica (dU), termini di scambio con l'esterno, termico (dQ) e dinamico ($d(pv)$), ed infine un termine di dissipazione.

Come già notato, le relazione di Bernoulli vale a rigore lungo le sole linee di corrente, essa è tuttavia applicata alle correnti concrete, di sezione anche notevole, considerando opportuni valori medi nella sezione generica, non soltanto per la velocità, ma anche per tutte le quantità caratteristiche dello stato del fluido p, v, T . La quota z è presa nel baricentro della sezione considerata.

11.4. Definizione operativa del carico di attrito

Si consideri un condotto a pareti rigide, di sezione costante, disposto orizzontalmente e attraversato da un fluido in regime permanente. Individuate due sezioni 1 e 2 l'equazione (11.7) fornisce:

$$(h_a)_{1,2} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w^2_2 - w^2_1}{2g} = 0$$

Se si ammette trascurabile l'effetto della variazione di pressione sul peso specifico, come nel caso di liquidi in moto ($\gamma = \text{cost.}$), per quanto stabilito circa l'area della sezione del condotto, anche la velocità subisce variazioni trascurabili, si ha così:

$$(h_a)_{1,2} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Nelle condizioni poste, la caduta di pressione, misurata da un manometro differenziale, divisa per il peso specifico del fluido, fornisce il carico corrispondente all'attrito $(h_a)_{1,2}$ e cioè la quantità detta comunemente *perdita di carico*. La relazione tra tale grandezza e la produzione entropica è dedotta dalla definizione stessa di carico d'attrito, risulta infatti:

$$dS_s = \frac{g}{T} dh_a$$

Una interessante interpretazione dei fenomeni di attrito è offerta dalla meccanica dei fluidi. Per effetto della *viscosità* delle particelle fluide e dell'*aderenza* di queste alle pareti del condotto, un filetto di corrente è mantenuto in moto rispetto alle rimanenti porzioni di fluido ovvero alle pareti, applicando un lavoro. Questo lavoro diviso per il volume di fluido spostato, fornisce la caduta di pressione per attrito e quest'ultima, divisa per il peso specifico del fluido, dà la perdita di carico.

11.5. Calcolo delle cadute di pressione per attrito

La caduta di pressione per attrito in un condotto rettilineo a sezione costante è normalmente riferita all'unità di lunghezza del condotto e denominata caduta di pressione (o perdita di carico) lineare. Essa risulta:

$$\frac{\Delta p_a}{l} = \gamma \frac{\Delta h_a}{l} \quad (11.8)$$

Per un tubo liscio, la caduta di pressione lineare dipende essenzialmente dalle proprietà del fluido, dalle condizioni di moto e dalla geometria del condotto. Prima di presentare le relazioni per il calcolo è opportuno richiamare alcune informazioni sulle caratteristiche dei fluidi.

11.5.1. Proprietà reologiche dei fluidi

Per descrivere il comportamento termodinamico di un fluido in moto è necessaria la conoscenza sia delle proprietà termodinamiche, sia della viscosità. Un fluido reale è infatti caratterizzato da viscosità non nulla, che può essere trascurata soltanto in condizioni del tutto particolari quando le forze di attrito sono trascurabili rispetto alle rimanenti forze in gioco. Si consideri il moto completamente sviluppato, in regime permanente e laminare, di un fluido contenuto tra due pareti piane indefinite di cui una in quiete e l'altra mantenuta in moto a

velocità w , sotto la spinta di una forza agente nella direzione parallela alla lastra. Si definisce *viscosità dinamica* del fluido il coefficiente di proporzionalità tra lo sforzo tangenziale esercitato sull'elemento fluido ed il gradiente di velocità nel fluido, in direzione normale al moto.

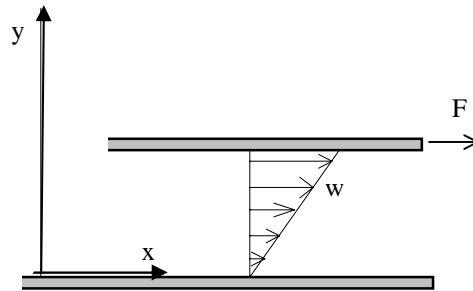


Fig. 11.2. Moto laminare di uno strato fluido compreso tra due lastre piane indefinite.

Indicando con A l'area della superficie di contatto tra la lastra ed il fluido, la resistenza allo scorrimento F viene espressa in modulo dalla legge di Newton:

$$F = \mu A \frac{dw}{dy} \quad \text{ovvero} \quad \tau_{yx} = \frac{F}{A} = \mu \frac{dw}{dy} \quad (11.9)$$

in cui τ_{yx} rappresenta lo sforzo tangenziale (agente su un piano di normale y , secondo la direzione x) e μ la viscosità dinamica del fluido.

Per una vasta categoria di fluidi, detti *newtoniani*, la viscosità μ , ad una data temperatura e pressione, è indipendente dallo sforzo viscoso. Esistono tuttavia fluidi per i quali le condizioni di moto non possono esprimersi secondo la (11.9) essendo la stessa μ dipendente dallo sforzo tangenziale τ , per essi è dunque:

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\tau}{\mu(\tau)}$$

A seconda dell'andamento della funzione $\mu(\tau)$, i fluidi viscosi vengono detti "pseudo plastici" e "dilatanti". Appartengono alla categoria dei fluidi pseudo-plastici quasi tutti i polimeri liquidi ad elevato peso molecolare, mentre le sospensioni e le vernici hanno in genere un comportamento dilatante (Fig. 11.3). La scienza che si occupa del comportamento dei fluidi non newtoniani prende il nome di *reologia*. I fluidi reali che considereremo verranno supposti newtoniani; per essi la viscosità dipende notevolmente dalla temperatura ed in minor misura dalla pressione.

Il comportamento dei fluidi è diverso a seconda che essi si trovino allo stato liquido o aeriforme. Negli aeriformi la viscosità aumenta con la temperatura, mentre nei liquidi tende a diminuire. Sia negli aeriformi che nei liquidi la viscosità aumenta con la pressione.

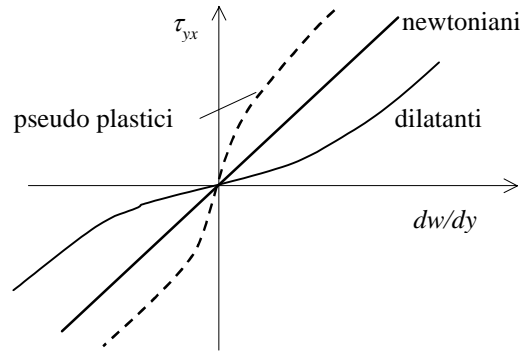


Fig. 11.3. Proprietà reologiche dei fluidi.

Si definisce *viscosità cinematica* il rapporto tra la viscosità dinamica e la densità $\nu = \mu / \rho$. Tale grandezza ha le dimensioni di un'area divisa per un tempo.

11.5.2. Analisi dimensionale e numero di Reynolds

I risultati di esperienze analoghe a quelle descritte per la definizione operativa del carico d'attrito, suggeriscono di assumere che la caduta di pressione lineare in un condotto rettilineo a pareti perfettamente lisce dipenda essenzialmente dalla velocità w , dalla densità ρ e dalla viscosità μ del fluido, dalla forma e dimensioni della sezione (costante) del condotto. Se dunque rappresentiamo i fattori geometrici con D , diametro della sezione, ed assumiamo una velocità media del fluido, si può scrivere:

$$\frac{\Delta p}{l} = f(w, \rho, \mu, D)$$

Si assuma la funzione f sviluppabile in serie di potenze con costanti B_i :

$$\frac{\Delta p}{l} = \sum_i B_i w^{u_i} \rho^{x_i} \mu^{y_i} D^{z_i}$$

e si applichi il criterio di omogeneità dimensionale (teorema di Buckingham). Raggruppando le potenze che hanno la stessa base in riferimento alle tre grandezze meccaniche fondamentali che intervengono, si ottengono tre equazioni nelle quattro incognite date dagli esponenti. Se si esprimono le incognite in funzione di y_i si ottiene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \sum_i B_i w^{2-y_i} \rho^{1-y_i} \mu^{y_i} D^{-1-y_i}$$

Mettendo infine in evidenza le potenze con esponente costante:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho w^2}{2D} \sum_i 2 B_i \left(\frac{w \rho D}{\mu} \right)^{-y_i} = \gamma \frac{w^2}{2g} \frac{1}{D} f'(Re)$$

con $Re = \frac{w\rho D}{\mu}$ è stato indicato il gruppo adimensionale denominato *numero di Reynolds*. La funzione $f'(Re)$, indicata nel seguito con λ , è detta *fattore di attrito* (di Darcy) nei tubi ed è adimensionale.

11.5.3. Fattore d'attrito nei tubi

La caduta di pressione per attrito, per un condotto rettilineo di diametro D , è dunque:

$$\Delta p_a = \gamma \frac{w^2}{2g} \frac{l}{D} \lambda = \gamma h_a \quad (11.10)$$

La perdita di carico corrispondente, per un dato valore di λ , risulta pertanto proporzionale al carico cinetico ed alla lunghezza del condotto:

$$h_a = \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{l}{D} \quad (11.11)$$

Per la valutazione del fattore di attrito λ si fa riferimento ad espressioni analitiche nel caso di *moto laminare* ed a formule empiriche o diagrammi nel caso di *moto turbolento*. Per piccole velocità e piccoli valori di Re , l'esperienza dimostra che il moto si sviluppa per filetti fluidi ben definiti e continui, tra loro paralleli (moto laminare o viscoso); nel secondo caso invece i filetti fluidi perdono definizione e continuità per effetto dei vortici. Il numero di Reynolds costituisce il criterio che consente di individuare i due distinti regimi. Il suo significato fisico può essere stabilito considerando le forze associate all'inerzia ed alla viscosità del fluido in moto. Le prime sono proporzionali alla variazione del flusso di quantità di moto, cioè al prodotto della portata per la variazione della velocità, mentre le seconde, riferite all'unità di area, sono proporzionali al prodotto della viscosità per il gradiente di velocità. Indicando con l una lunghezza significativa, il rapporto tra forze di inerzia e forze viscosive risulta proporzionale a:

$$\frac{wl^2 \rho w}{\mu \frac{w}{l} l^2} = \frac{wl\rho}{\mu} = Re$$

il numero di Reynolds può dunque essere ritenuto rappresentativo del rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosive. Quando le forze viscosive risultano prevalenti (bassi valori di Re) il moto è laminare e diventa turbolento al prevalere delle forze di inerzia.

Nel caso di condotti a sezione circolare, il fattore di attrito nel regime laminare risulta dato da:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (11.12)$$

La transizione tra il regime laminare e quello turbolento si stabilisce nel campo di valori del numero di Reynolds Re compresi tra circa 2000 e 3500.

Nel regime turbolento la resistenza d'attrito è fortemente influenzata dalla rugosità della parete e di ciò si tiene conto introducendo il rapporto adimensionale ε/D in cui ε rappresenta la scabrezza assoluta della parete del condotto. Sulla base dei risultati sperimentali ottenuti con diversi fluidi, diverse rugosità e dimensioni dei condotti, è stato costruito il diagramma di

Moody riportato in Fig.11.4. Gli andamenti in esso rappresentati sono stati correlati da Colebrook mediante l'equazione:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \quad (11.13)$$

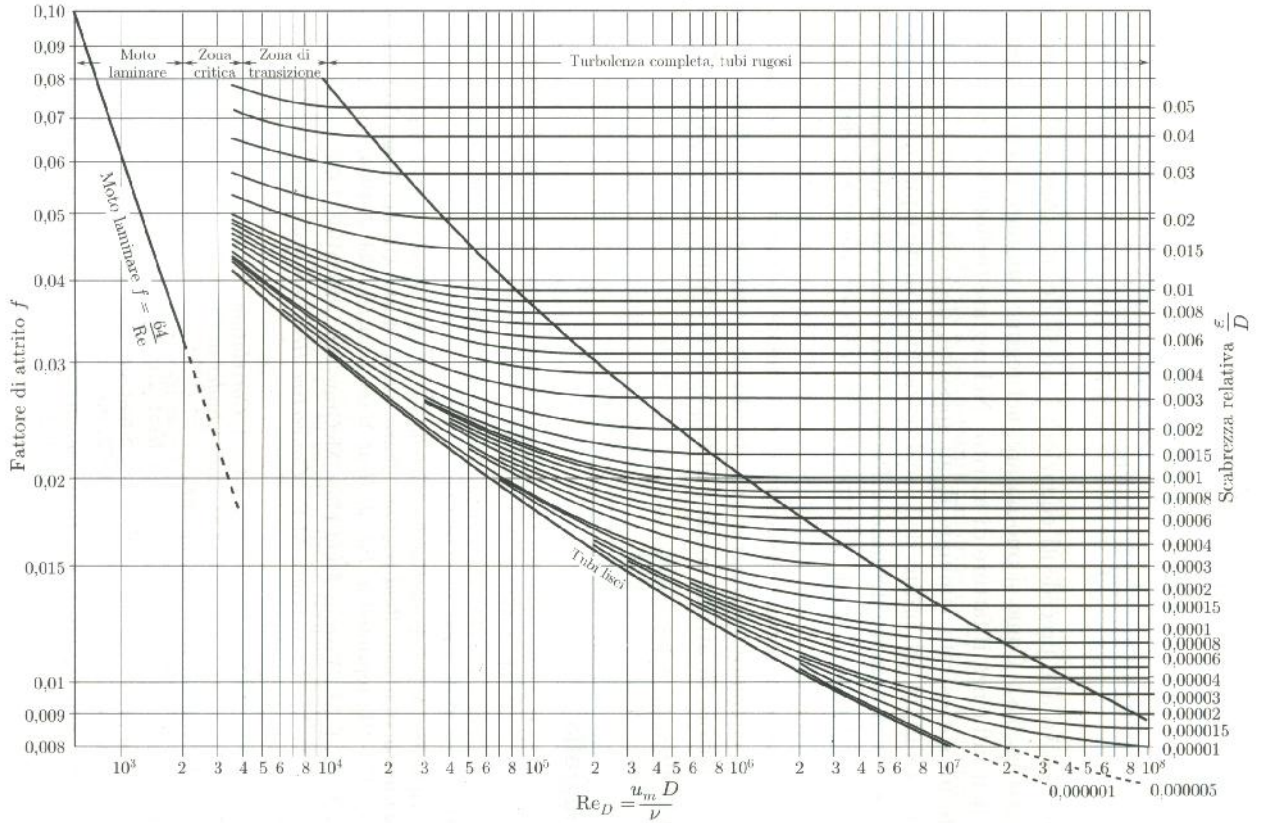


Fig. 11.4. Fattore d'attrito nei tubi: diagramma di Moody.

Dalle espressioni riportate può dedursi che la caduta di pressione per attrito nella regione laminare risulta proporzionale alla velocità del fluido, mentre nel regime turbolento, per λ indipendente da Re , la Δp diventa proporzionale a w^2 .

11.5.4. Perdite di carico in singolarità

In pratica il fluido in moto in condotti incontra molte altre resistenze, localizzate in determinate zone. Di particolare interesse sono quelle dovute a brusche variazioni della sezione e della direzione del moto, e quelle provocate dalla presenza di ostruzioni quali filtri, valvole rubinetti ecc.

Il calcolo di queste resistenze localizzate è in genere piuttosto impreciso e soltanto in limitati casi impostato su basi teoriche, per la complessità del moto ci si basa su dati puramente sperimentali. Rinviano a manuali specializzati si può osservare che in generale tutte le resistenze vengono espresse in funzione del carico cinetico secondo la espressione:

$$\Delta p' = \gamma \frac{w^2}{2g} \lambda' \quad (11.14)$$

dove λ' assume valori diversi caso per caso, in funzione del tipo di singolarità.

In conclusione la totale perdita di carico per resistenze distribuite e localizzate risulta data da una relazione del tipo:

$$h_a = \sum_i \lambda_i \frac{w_i^2}{2g} \frac{l_i}{D_i} + \sum_j \lambda'_j \frac{w_j^2}{2g} \quad (11.15)$$

con w_i e w_j valori delle velocità medie locali.

11. 6. Moti con notevoli differenze di temperatura

In numerose situazioni il moto del fluido è provocato da gradienti locali di densità, dovuti a gradienti di temperatura, che, in presenza del campo gravitazionale, danno origine a spinte di galleggiamento. Così è ad esempio per i circuiti a termosifone, per i cabinets contenenti componenti elettronici refrigerati per ventilazione naturale, in tutti i casi in cui si sviluppano moti convettivi naturali. Una applicazione dell'equazione di Bernoulli allo studio del moto dovuto a differenze di temperatura è nota come "problema del camino" che verrà affrontato a titolo esemplificativo, in forma semplificata.

Si consideri un camino per lo smaltimento dei fumi prodotti in camera di combustione e si supponga che sia schematizzabile come un condotto avente un breve tratto orizzontale seguito da un tratto verticale molto più lungo. Poniamo nel tratto 1-2 la temperatura uniforme e pari T_i mentre nella colonna esterna la temperatura è T_e ; i pesi specifici corrispondenti siano γ_i e γ_e . La distribuzione della temperatura presenta dunque una discontinuità all'imbocco, mentre è esclusa una discontinuità della pressione.

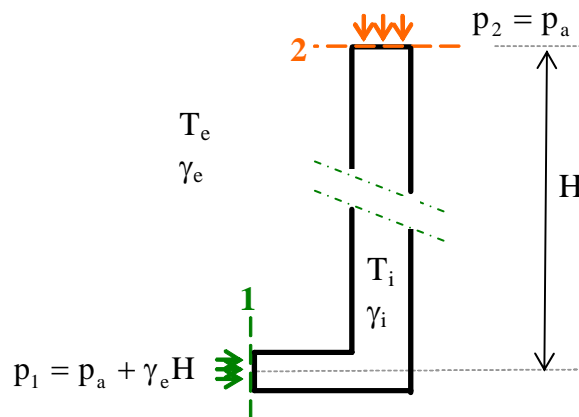


Fig. 11.5. Applicazione dell'equazione di Bernoulli al problema del camino.

L'equazione di Bernoulli applicata al tratto compreso tra le sezioni 1 e 2 si scrive:

$$(h_e)_{1,2} + (h_a)_{1,2} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = 0$$

Si può notare che la velocità in 1 è generalmente trascurabile poiché il fluido proviene da una sezione molto più grande; indicando con p_a la pressione atmosferica all'altezza della sezione 2, la pressione agente sulla faccia esterna della sezione 1 sarà $(p_a + \gamma_e H)$. Per la costanza dei pesi specifici si ha:

$$\frac{w_2^2}{2g} + H + (h_a)_{1,2} = H \frac{\gamma_e}{\gamma_i} - (h_e)_{1,2} \quad (11.16)$$

Nell'ipotesi che il camino sia a tiraggio naturale ($(h_e)_{1,2}=0$) la precedente si semplifica e può scriversi nella forma:

$$H(\gamma_e - \gamma_i) = \gamma_i \left(\frac{w_2^2}{2g} + (h_a)_{1,2} \right) \quad (11.17)$$

Il prodotto a primo membro rappresenta la pressione differenziale, disponibile alla base del camino, che provoca il moto ed equilibra la caduta di pressione dovuta all'accelerazione del fluido e quella dovuta all'attrito. Tale pressione differenziale è correlabile alla differenza di temperatura tra le colonne di fluido, interna ed esterna, in opposizione.

Esprimendo ora le resistenze di attrito distribuite e localizzate in funzione della velocità, nell'ipotesi di condotto a sezione costante e lunghezza H , si ha:

$$H(\gamma_e - \gamma_i) = \gamma_i \frac{w_2^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{H}{D} + \sum_j \lambda_j \right) \quad (11.18)$$

Risolvendo la (11.18) si ottiene infine la velocità del fluido allo sbocco (sezione 2), per un camino di definite caratteristiche geometriche, note le temperature dei fluidi all'interno ed all'esterno:

$$w = \sqrt{\frac{2g(\gamma_e - \gamma_i)H}{\gamma_i \left(1 + \lambda \frac{H}{D} + \sum_j \lambda_j \right)}} \quad (11.19)$$

Un calcolo più approssimato potrà essere fatto tenendo conto delle inevitabili non uniformità di temperatura nel condotto. Allo scopo il camino può essere suddiviso in tratti isotermi a cui applicare il procedimento per la valutazione della pressione differenziale disponibile.

Nel caso in cui si voglia procedere al dimensionamento geometrico di un camino, il problema può ancora essere risolto con la (11.18) se, note le temperature e la portata dei fumi, viene stabilito un valore per la velocità dei gas allo sbocco. In queste condizioni, il problema nelle incognite H e D può risolversi associando l'equazione di continuità.

Nel caso infine di camino a tiraggio forzato è solitamente trascurabile $H(\gamma_e - \gamma_i)$ rispetto a $(h_e)_{1,2}$ (anche perché H è piccola) cosicché:

$$-\gamma_i (h_e)_{1,2} = \gamma_i \left(\frac{w_2^2}{2g} + (h_a)_{1,2} \right)$$

Si ha dunque:

$$-(h_e)_{1,2} = h_m = \frac{w_2^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{H}{D} + \sum_j \lambda_j \right) \quad (11.20)$$

Il dimensionamento del propulsore si effettua associando l'equazione di continuità per determinare D , fissata la velocità dei fumi, e l'altezza H , essendo note le temperature e la portata.

11.7. Il problema del propulsore

Il moto dei fluidi nei condotti può essere provocato per gravità, inserendo ad esempio un serbatoio sopraelevato, ovvero per differenze di temperatura, o, infine, per la presenza di un propulsore. Consideriamo quest'ultimo caso con riferimento ad un circuito chiuso con qualsivoglia giacitura, per valutare il carico motore (negativo) e la potenza del propulsore. Ponendo $h_m = -h_e$, il carico del propulsore risulta in generale definito dalla equazione di Bernoulli posta nella forma:

$$h_m = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma_i} + (h_a)_{1,2}$$

Il valore di h_m dipende dunque dalla distribuzione di pressione lungo il condotto. Noto h_m , la potenza del propulsore si può ottenere ricordando che tale carico rappresenta il lavoro applicato all'unità di peso del fluido in moto. Moltiplicando allora h_m per la portata in peso di fluido evolvente, si ottiene la potenza del propulsore:

$$P_p = \dot{m} g h_m = w A \Delta p_m$$

Tale potenza è pertanto proporzionale al carico del propulsore ovvero alla pressione generata dal propulsore Δp_m .

Considerando il circuito chiuso di Fig. 11.5, operante a regime permanente, supponiamo di tagliare lo stesso con la sezione S e di applicare l'equazione di Bernoulli all'intero circuito compreso tra le sezioni 1 e 2, considerando queste, rispettivamente, come faccia di ingresso e faccia di uscita del fluido attraverso S .

Si ha $z_1 = z_2$, $w_1 = w_2$ ed inoltre $p_1 = p_2$, $h_1 = h_2$. Ne segue che:

$$h_m = \int_1^2 \frac{dp}{\gamma_i} + (h_a)_{1,2} \quad (11.21)$$

ed inoltre dall'equazione di bilancio dei sistemi aperti:

$$Q_{1,2} = L e_{1,2} \quad (11.22)$$

La (11.21) conferma la dipendenza del carico del propulsore dalla distribuzione di pressione lungo il circuito. Soltanto nel caso di fluido incomprimibile il carico del propulsore si riduce al carico d'attrito complessivo.

La (11.22) precisa che tutto il lavoro applicato al sistema passa all'esterno come calore. Pertanto un circuito chiuso, in regime permanente, non può risultare adiabatico.

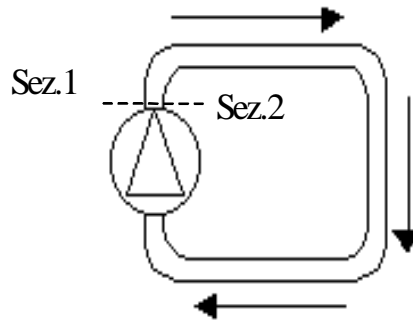


Fig. 11.6. Applicazione dell'equazione di Bernoulli ad un circuito chiuso.

Se il circuito in esame non fosse chiuso, come nel caso di figura 11.7, allora il carico del propulsore risulterebbe funzione anche del dislivello tra le sezioni estreme (giacitura del sistema) e della variazione di energia cinetica impressa al fluido. L'equazione di Bernoulli applicata al caso di un liquido, posto che le pressioni in 1 e 2 si possano ritenere uguali tra loro e pari alla pressione atmosferica, si può scrivere:

$$h_m = \frac{w_2^2}{2g} + H + (h_a)_{1,2}$$

trascurando la velocità del fluido nella sezione 1.

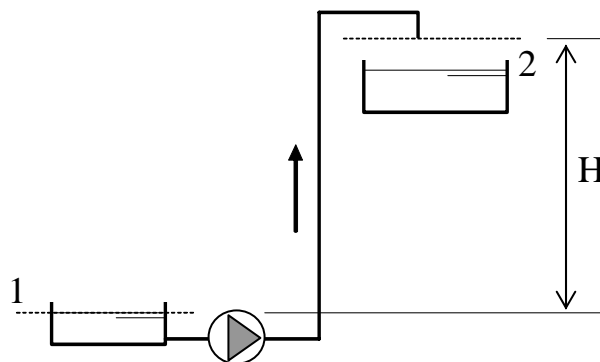


Fig. 11.7. Applicazione dell'equazione di Bernoulli ad un circuito aperto.

11.8. Moto di fluidi comprimibili in condotti a sezione variabile

In molte applicazioni di ingegneria i gas si muovono a velocità relativamente elevate sperimentando significative variazioni di densità in efflussi in condotti a sezione variabile. Importanti esempi sono rappresentati dal moto attraverso ugelli e diffusori nelle macchine a getto per la propulsione aerea, dall'efflusso di gas o vapori nelle turbomacchine, dal moto nelle gallerie del vento o negli eiettori. Questi efflussi sono noti come efflussi comprimibili e rappresentano un settore della termofluidodinamica applicata di notevole interesse.

Per studiare meglio le caratteristiche del moto in tali condizioni, esaminiamo dapprima la conformazione di una vena fluida in un efflusso libero, quale si verifica ad esempio nel caso in cui venga praticato un foro nella parete di un recipiente in pressione.

11.8.1. Caratteristiche dell'efflusso in vena libera

L'efflusso spontaneo di un fluido da un recipiente in pressione attraverso una apertura mostra caratteristiche che dipendono principalmente dai valori delle pressioni che lo determinano. Detta p_1 la pressione vigente all'interno del recipiente e p_2 la pressione dell'ambiente esterno, la vena fluida mostra nell'efflusso una forma caratteristica con restringimento iniziale (convergente, dovuto all'inerzia delle particelle) e successivo moderato allargamento.

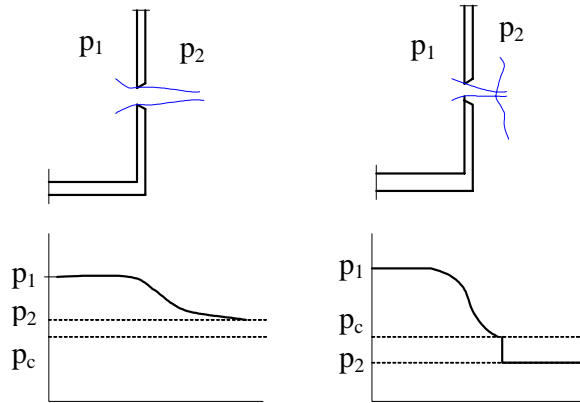


Fig. 11.8. Efflusso in vena libera di un fluido comprimibile.

Se però la pressione a valle p_2 è minore di una data pressione, detta *pressione critica di efflusso* p_c , la vena mostra una netta discontinuità di pressione e la conseguente rottura.

Con riferimento alla portata in massa \dot{m} defluente attraverso l'apertura, se $p_2 \geq p_c$, \dot{m} cresce con regolarità, a parità di p_1 , al diminuire di p_2 fino a $p_2 = p_c$; per $p_2 < p_c$ la portata non subisce più aumenti, ma resta uguale a quella corrispondente a $p_2 = p_c$, che è la massima possibile. A quest'ultima condizione corrisponde una velocità di efflusso uguale a quella di propagazione del suono nel fluido (w_s) nelle condizioni termodinamiche vigenti nella sezione contratta ($p = p_c, \rho = \rho_c$).

Per $p_2 < p_c$ la velocità del fluido nella sezione contratta non cresce oltre w_s se non di molto poco, con irregolarità e fluttuazioni. L'aumento di velocità è poi minore di quello che si potrebbe ottenere sfruttando tutto il salto entalpico disponibile.

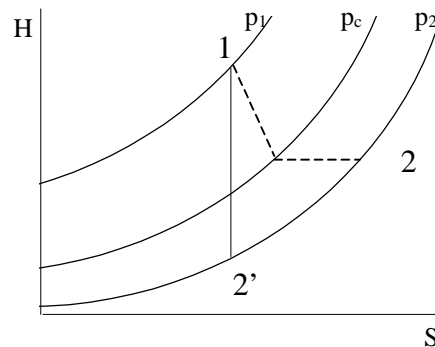


Fig. 11.9. Efflusso in vena libera di un fluido comprimibile, con rottura della vena.

Poiché l'aumento di velocità oltre la velocità di propagazione del suono non è affatto sicuro e sempre assai piccolo, si deve ritenere che nell'efflusso in vena libera la massima velocità del fluido sia w_s . Si ha dunque un effetto di irreversibilità classificabile tra le sorgenti entropiche per discontinuità di pressione.

Si comprende come la non integrale utilizzazione (in energia cinetica) della totale caduta entalpica disponibile (per $p_2 < p_c$) costituisca un notevole svantaggio. L'inconveniente può però essere eliminato applicando alla luce di efflusso un condotto detto "ugello di efflusso" opportunamente sagomato così da guidare la vena fluida, permettendo una regolare variazione della pressione ed evitando il fenomeno dissipativo della rottura.

Da queste considerazioni trae origine lo studio del moto dei fluidi in condotti a sezione variabile. Premettiamo l'equazione che fornisce la velocità di propagazione del suono (onde di pressione di limitata ampiezza) in un fluido.

11.8.2 Velocità del suono e numero di Mach

In fluidodinamica si definisce "velocità del suono", la velocità con la quale si propaga in un fluido una perturbazione infinitesima di pressione. Le particelle del fluido interessato alla propagazione di un'onda sonora subiscono generalmente un piccolo spostamento accompagnato da variazioni di densità, pressione e temperatura altrettanto piccole. Lo spostamento macroscopico a velocità rilevante riguarda il solo fronte d'onda.

Si consideri un condotto ad asse rettilineo orizzontale, di sezione costante A , contenente un fluido inizialmente in quiete a pressione p (uniforme), temperatura T (uniforme), densità ρ . Immaginiamo di produrre un'onda di pressione nel fluido mediante il movimento di un pistone con velocità uniforme infinitesima dw . Questo genera un'onda di pressione il cui fronte si muoverà con velocità uniforme w_s . Il fluido attraverso cui il fronte è passato si troverà alla pressione perturbata $p+dp$, densità $\rho+dp$, e avrà velocità dw (Fig. 11.10a).

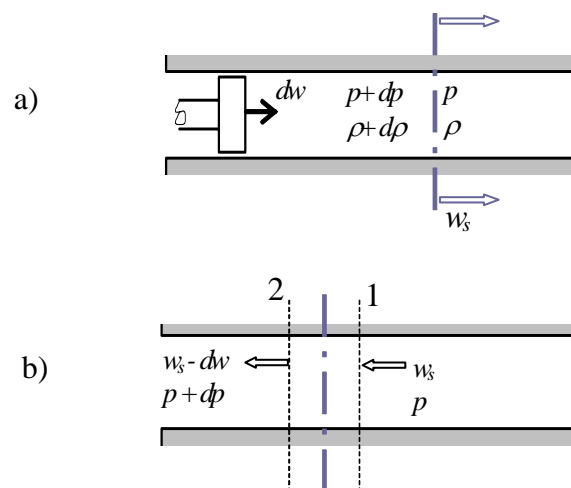


Fig. 11.10. Velocità di propagazione di un disturbo di pressione in un fluido comprimibile.

Rispetto ad un riferimento solidale con il fronte d'onda il fluido scorre da destra verso sinistra, con velocità che si riduce da w_s a $w_s - dw$, mentre la pressione passa da p a $p + dp$ (Fig. 11.10b).

Essendo il moto stazionario possiamo applicare l'equazione di conservazione della quantità di moto e quella di continuità nella forma:

$$A [p - (p + dp)] = \dot{m} [(w_s - dw) - w_s]$$

$$\dot{m} = A w_s \rho = (w_s - dw) A (\rho + d\rho)$$

Dalla prima si ha:

$$A dp = \dot{m} dw \quad \text{ed essendo } \dot{m} = A w_s \rho$$

$$w_s = \frac{dp}{\rho dw} \quad (11.23)$$

Dalla seconda, sviluppando:

$$d\rho = \rho \frac{dw}{w_s} \quad \text{da cui:} \quad dw = w_s \frac{d\rho}{\rho} \quad (11.24)$$

Sostituendo la (11.24) nella (11.23), si ricava in definitiva:

$$w_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (11.25)$$

La velocità del suono è dunque una proprietà termodinamica caratteristica del mezzo e del processo. La forma trovata per w_s è la più generale. La (11.25) suggerisce che la velocità del suono è tanto più elevata quanto più piccole sono le variazioni di densità conseguenti ad una data variazione di pressione. Dalla precedente equazione si deducono espressioni più semplici per i particolari casi esaminati. Nel caso di un processo isoentropico per un gas perfetto la (11.25) si riduce alla nota espressione di Laplace:

$$w_s = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{k R_1 T} \quad (11.26)$$

con $k = \frac{c_p}{c_v}$. Per una adiabatica di Poisson si ha infatti: $\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}$ da cui la precedente.

Numerose esperienze hanno indicato che la relazione tra pressione e densità attraverso un'onda di pressione risulta quasi isoentropica almeno a frequenze non troppo elevate.

11.8.3 Equazione di Hugoniot

Nel caso di efflusso senza sorgenti entropiche (in particolare senza attrito), orizzontale e senza lavoro esterno netto, la equazione (11.6) si riduce a:

$$\frac{dw^2}{2g} + \frac{dp}{g\rho} = 0 \quad \text{ovvero alla:} \quad w dw = -\frac{dp}{\rho}$$

Esprimendo la variazione di pressione per mezzo della (11.25) si ha dunque:

$$w dw + w_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (11.27)$$

in cui w_s è la velocità di propagazione del suono nelle condizioni attuali di pressione, temperatura e densità. Ricavando dalla (11.27) il termine $\frac{d\rho}{\rho}$ e sostituendolo nella equazione di continuità in forma differenziale (11.2), si ottiene infine:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dw}{w} \quad (11.28)$$

con $M = \frac{w}{w_s}$, numero di Mach.

La (11.28), dovuta a Hugoniot, è una relazione molto importante nello studio degli efflussi di fluidi comprimibili; da essa si possono ottenere importanti indicazioni sulle modalità di efflusso anche se valide a rigore nel caso di moto in un condotto rigido, orizzontale, privo di attrito. L'equazione di Hugoniot può essere posta nelle seguenti forme equivalenti:

$$\frac{dA}{A} = -(M^2 - 1) \frac{dp}{w^2 \rho} \quad (11.29)$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{(M^2 - 1)}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (11.30)$$

Le precedenti consentono di notare quanto segue.

1. Se la velocità attuale di deflusso w è minore di quella di propagazione del suono ($M < 1$), *regime subsonico*, risulta:

$$\frac{dA}{dw} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dp} > 0$$

le variazioni di velocità (dw) sono di segno opposto a quello delle variazioni dell'area della sezione di deflusso (dA) e della pressione (dp).

2. Se la velocità attuale è maggiore di quella di propagazione del suono ($M > 1$), *regime supersonico*, risulta:

$$\frac{dA}{dw} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dp} < 0$$

Le variazioni di velocità (dw) sono dello stesso segno delle variazioni di area (dA) e, anche in questo caso, di segno opposto alle variazioni di pressione (dp).

3. Posto che le caratteristiche del condotto ed i valori delle pressioni estreme siano tali da conferire al fluido in una certa sezione la velocità del suono ($M = 1$), per dw arbitrario è comunque $dA = 0$ e pertanto la velocità w_s viene ottenuta in una sezione di area minima (*regime sonico*).

E' da notare tuttavia che se in una data sezione di un condotto si ha $dA = 0$, ciò non comporta necessariamente che ivi si instauri la velocità w_s . Perché questo si verifichi occorre che l'espansione sia accompagnata da una variazione di entalpia tale da conferire al fluido la energia cinetica corrispondente. Nel caso di efflusso adiabatico, infatti, l'entalpia nella sezione contratta dovrà assumere un valore definito H_c dato da:

$$H_1 - H_c = \frac{w_s^2 - w_1^2}{2} \quad (11.31)$$

A tale valore dell'entalpia, per assegnate condizioni iniziali, corrisponde un definito valore della temperatura T_c (temperatura critica di efflusso) ed una definita pressione p_c (pressione critica di efflusso). Si potrà allora stabilire che l'istituirsi (nella sezione detta) dello stato critico di efflusso (T_c, p_c) implica in quella sezione $w = w_s$, $M = 1$, e quindi $dA = 0$. La pressione critica vige dunque soltanto nella sezione di area minima. Si noti che qualora il condotto non presentasse variazione di sezione adeguata, sarebbe la vena stessa a contrarsi.

Quanto descritto sugli efflussi in vena libera può ancora essere interpretato attraverso l'equazione di Hugoniot. Nel caso di $p_2 > p_c$ la vena fluida conserva continuità ed il fluido assume nella sezione di area minima la pressione a valle p_2 . L'efflusso si sviluppa in regime subsonico con espansione accompagnata da incremento della velocità e riduzione dell'area della sezione della vena fluida. In queste condizioni per guidare la vena fluida si utilizzano condotti convergenti detti boccagli.

Se $p_2 < p_c$ la vena si presenta continua in un primo tratto a sezione decrescente ed in corrispondenza della sezione contratta si stabilisce una brusca discontinuità di pressione, accompagnata da perdita di velocità ed allargamento dell'area della sezione. A monte della sezione contratta la pressione tende al valore critico di efflusso ed immediatamente a valle la pressione è quella imposta di valore p_2 , con conseguenti effetti dissipativi. Per far aumentare ulteriormente la velocità diventa necessario guidare la vena in modo che si realizzi un graduale aumento dell'area della sezione (regime supersonico). Un condotto convergente divergente configurato per tale scopo è l'ugello di De Laval.

11.8.4 Proprietà al ristagno

Un concetto che semplifica l'analisi di alcuni problemi è quello di stato isoentropico al ristagno. Le proprietà termodinamiche ad esso associate sono dette proprietà al ristagno e nel seguito verranno indicate con il pedice "o". Si definisce *stato isoentropico al ristagno* lo stato che il fluido assumerebbe se venisse arrestato reversibilmente mediante una trasformazione senza scambi (di calore e lavoro). Dall'equazione di bilancio per un volume di controllo a regime permanente, si ha:

$$H_0 = H + \frac{w^2}{2} \quad (11.32)$$

ed inoltre per definizione è $S = S_0$.

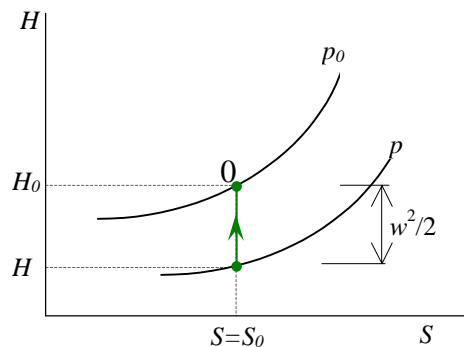


Fig. 11.11. Definizione di stato isoentropico al ristagno.

Tutte le altre grandezze termodinamiche possono essere ottenute essendo lo stato definito. In particolare, per un gas perfetto, nell'ipotesi di calori specifici costanti, la temperatura al ristagno risulta:

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}$$

ed è la temperatura che misurerebbe un termometro fermo investito da una corrente fluida in moto alla velocità w . La pressione al ristagno può determinarsi tramite la:

$$T_0 p_0^{-\frac{k-1}{k}} = \text{cost}$$

Si noti infine che l'entalpia data dalla (11.32), vale anche nel caso di un processo di perdita di velocità del fluido adiabatico ma con irreversibilità; non è così per l'entropia e le altre grandezze.

11.8.5 Velocità di efflusso e pressione critica

Il valore della *velocità di efflusso* w_2 che viene assunto come riferimento è quello corrispondente al caso di ugello orizzontale, a pareti rigide ed adiabatico. Per tale condizione, a regime, si ha:

$$H_2 - H_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0 \quad \text{da cui:} \quad w_2 = \sqrt{2(H_{0,1} - H_2)} \quad (11.33)$$

avendo indicato con $H_{0,1}$ l'entalpia al ristagno corrispondente allo stato 1. L'equazione così ottenuta vale in generale per qualunque fluido a due variabili.

Di particolare interesse è il caso degli aeriformi, che viene in genere analizzato con le ipotesi di gas perfetto e calori specifici costanti. Con tali ipotesi, essendo $c_p = \frac{k}{k-1} R_1$, si ha:

$$w_2^2 = 2 c_p (T_{01} - T_2) = 2 \frac{k}{k-1} R_1 T_{01} \left(1 - \frac{T_2}{T_{01}}\right)$$

da cui infine l'equazione di Saint Venant:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R_1 T_{01} \left(1 - \frac{T_2}{T_{01}}\right)} \quad (11.34)$$

L'equazione ottenuta evidenzia l'esistenza di una velocità limite massima di efflusso adiabatico w_l corrispondente a $T_2 = 0$ e cioè alla condizione per cui tutta l'entalpia iniziale H_1 sarebbe utilizzata in energia cinetica dell'aeriforme:

$$w_l = \sqrt{\frac{2}{k-1}} w_{s,1}$$

Nel caso di gas biatomici, con $k = 1.4$, risulta $w_l = \sqrt{5} w_{s,1}$, essendo $w_{s,1}$ la velocità del suono nelle condizioni dello stato 1. Si noti che mentre l'esistenza di un limite è pienamente significativa, non lo è in realtà il valore indicato dalla precedente relazione poiché il fluido avvicinandosi allo zero assoluto non si mantiene allo stato aeriforme.

Un caso sovente considerato è quello di efflusso isoentropico per il quale il rapporto tra le temperature T_2/T_{01} può facilmente esprimersi in funzione del rapporto tra le pressioni con l'equazione di Poisson. La (11.34) diventa così:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R_1 T_{01} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad (11.35)$$

Come si può notare, fissate le condizioni iniziali e la pressione finale, i gas con più elevati valori di k e di R_1 (gas monoatomici, con basso peso molecolare), raggiungono le più elevate velocità finali.

Il valore della *pressione critica di efflusso* può essere ottenuto notando che essa è definita come la pressione che si stabilisce dove si instaura la velocità del suono ($w = w_s$, $M=1$). Assumendo il fluido gas perfetto, a calori specifici costanti, e posto:

$$w_2^2 = M^2 k R_1 T_2$$

dalla (11.33) si ha:

$$T_{01} = T_2 + \frac{w_2^2}{2c_p} = T_2 + \frac{kR_1 T_2}{2c_p} M^2$$

da cui:

$$\frac{T_{01}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (11.36)$$

Il rapporto tra le temperature può esprimersi in funzione del rapporto tra le corrispondenti pressioni:

$$\frac{T_{01}}{T_2} = \left(\frac{p_{01}}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

e, per $M = 1$, risulta:

$$\left(\frac{p_{01}}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2}$$

da cui, infine, la pressione critica di efflusso:

$$\frac{p_c}{p_{01}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (11.37)$$

L'espressione ottenuta vale soltanto per il gas perfetto, ma può estendersi anche ad altri aeriformi con appropriati valori di k . La pressione critica di efflusso dipende dunque dalla natura chimico fisica del fluido e dal valore della pressione al ristagno a monte. Per i gas biatomici è $p_c = 0.528 p_{01}$, per il vapore surriscaldato $p_c = 0.577 p_{01}$. Ovviamente sostituendo la (11.37) nella (11.35) si ottiene la espressione della velocità di propagazione del suono nello stato 2.

Dalla (1.35) si può ricavare il valore della portata di efflusso mediante l'equazione di continuità:

$$\dot{m} = w_2 A_2 \rho_2 = A_2 \rho_2 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R_1 T_{01} \left(1 - \frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad (11.38)$$

Esprimendo la densità ρ_2 per mezzo dell'equazione di Poisson, per un dato valore di p_{01} , T_{01} e k , la portata risulta funzione della sola p_2 :

$$\dot{m} = A_2 \rho_{01} \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{1/k} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R_1 T_{01} \left(1 - \frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad (11.39)$$

Le curve della seguente Fig. 11.12 rappresentano gli andamenti della portata e della velocità di efflusso al variare del rapporto tra le pressioni secondo le equazioni (11.35) e (11.39): la portata raggiunge il valore massimo in corrispondenza delle condizioni critiche di efflusso ($w = w_s$), quando il rapporto tra le pressioni assume il valore dato dalla (11.37).

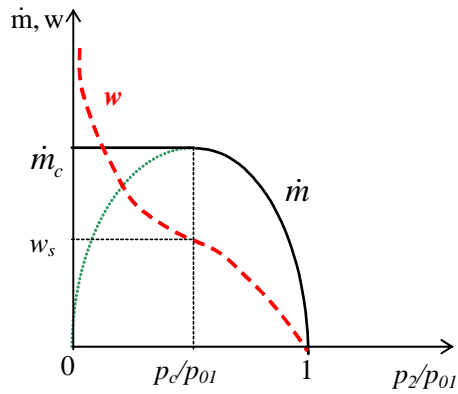


Fig. 11.12. Andamento della velocità e della portata di efflusso in funzione della pressione a valle.

La curva della portata fornita dalla (11.39) mostra che per valori di p_2 (pressione a valle) minori del suddetto valore critico, la portata decresce fino ad annullarsi per $p_2 = 0$. L'esperienza dice invece che per $p_2 < p_c$ la \dot{m} resta costante sul valore critico (che è quindi il massimo) $\dot{m}_c = A_c w_s \rho_c$, dove ρ_c è la densità effettiva nella sezione di area minima. La velocità di efflusso, per $p_2 < p_c$, non segue il corrispondente ramo della curva se la vena è libera, lo segue invece in un efflusso a vena guidata come ad esempio nel tratto divergente di un ugello di De Laval. La velocità dipende dalla caduta di entalpia effettiva, mentre la portata dipende anche dal valore della densità del fluido che diminuisce meno di quanto previsto dalla isoentropica.

11.8.6 Efflussi in condotti convergenti

Si consideri un ugello convergente (o boccaglio), con a monte definite condizioni al ristagno, collegato ad una regione a valle in cui la pressione può essere variata.

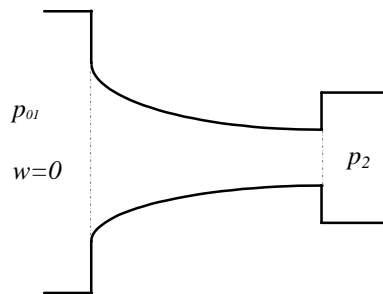


Fig. 11.13. Efflusso in un condotto convergente che collega due regioni a differente pressione.

Quando $p_2 = p_{01}$ la portata che attraversa il condotto è nulla, come nel caso a) della figura seguente. Al diminuire della p_2 si osserva un deflusso attraverso l'ugello con valori di portata dipendenti dalla pressione a valle (casi b), c)). Fintanto che il moto del fluido avviene in regime subsonico, le informazioni sulle variazioni delle condizioni a valle possono propagarsi a monte e quindi, al diminuire della p_2 , si verifica un incremento di portata ed un incremento del numero di Mach nella sezione di uscita. Raggiunto il valore $M = 1$ in uscita, ivi si ha $p_2 = p_c$ (caso d)).

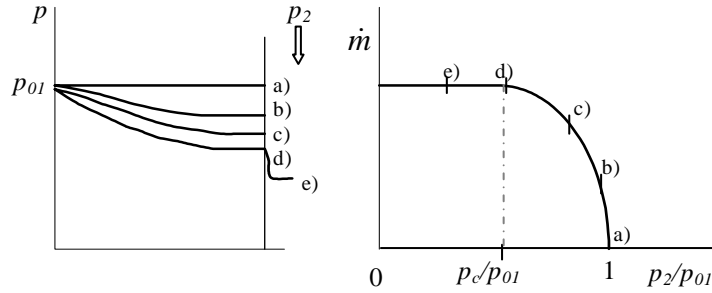


Fig. 11.14. Andamento della pressione e della portata di efflusso in un condotto convergente.

Ricordando che in un convergente il numero di Mach non può crescere oltre il valore unitario, se si diminuisce ulteriormente la p_2 al di sotto del valore critico, le condizioni di efflusso restano invariate nel convergente, mentre l'espansione da p_2 a p_c si realizza bruscamente oltre l'area di minima sezione dell'ugello. Il raggiungimento della velocità del suono impedisce infatti il propagarsi a monte delle "informazioni" sulle condizioni di pressione a valle: la portata di efflusso resta allora costante (si parla di *choked flow*).

11.8.7 Efflussi in condotti divergenti

Un ugello divergente (o diffusore) opera normalmente in regime subsonico ed ha lo scopo di provocare un incremento di pressione nel fluido per effetto e della diminuzione della velocità locale. Nel regime subsonico si ha infatti $\frac{dA}{dw} < 0$, e $\frac{dA}{dp} < 0$. Le variazioni di velocità sono di segno opposto a quello delle variazioni di pressione e dell'area della sezione di deflusso. Per un diffusore si definisce una efficienza in riferimento ai valori della pressione al ristagno nelle sezioni di ingresso (1) e di uscita (2). La diminuzione della pressione al ristagno è funzione del grado di irreversibilità del processo.

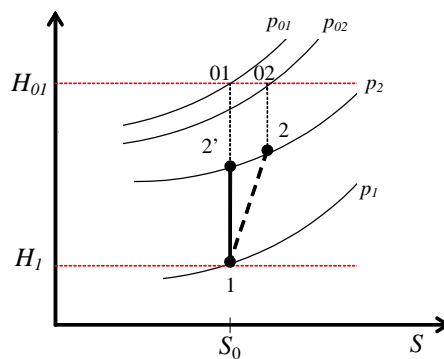


Fig. 11.15. Efflusso in un condotto divergente: definizione di efficienza del diffusore.

Se infatti il fluido venisse arrestato isoentropicamente nella condizione di ingresso (1), la pressione conseguente risulterebbe p_{01} e l'entalpia H_{01} . D'altra parte, nel processo in esame, ritenuto senza scambi di calore e lavoro, l'entalpia al ristagno si mantiene costante, è infatti:

$$H_1 + \frac{w_1^2}{2} = H_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad \text{e quindi} \quad H_{01} = H_{02} .$$

L'efficienza del diffusore, definita da:

$$\eta_D = \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad (11.40)$$

esprime dunque il grado di irreversibilità del processo ed assume valore unitario nel caso di rallentamento isoentropico.

11.8.8 Efflussi in condotti convergenti -divergenti

Si consideri il dispositivo rappresentato in Fig. 11.16, costituito da due tratti successivi, uno convergente (più breve) ed uno divergente, e percorso da un gas perfetto che entra nella sezione 1 ed esce in 2. Siano prefissate e pari al valore al ristagno, la temperatura e la pressione a monte (p_{01}) e si faccia variare la pressione p_2 imposta nella regione allo sbocco dell'ugello.

Al diminuire della pressione allo sbocco si possono verificare diverse modalità di efflusso. Immaginiamo che in tutto il condotto, ed in particolare nella sezione di gola, la pressione si mantenga maggiore di quella critica: nella sezione di gola la entalpia è maggiore di quella critica e la velocità di efflusso minore della w_s (condizioni a) e b)). Il moto si sviluppa in regime subsonico e la velocità aumenta all'avvicinarsi della sezione di area minima; raggiunto il massimo nella strozzatura, mantenendosi inferiore a quella del suono, diminuisce nel tratto divergente. La pressione subisce variazioni opposte come suggerisce l'equazione di Bernoulli. Questo comportamento è indicato come *effetto Venturi* ed il dispositivo dove si realizza è denominato tubo di Venturi, frequentemente utilizzato per la misura di portata nei condotti.

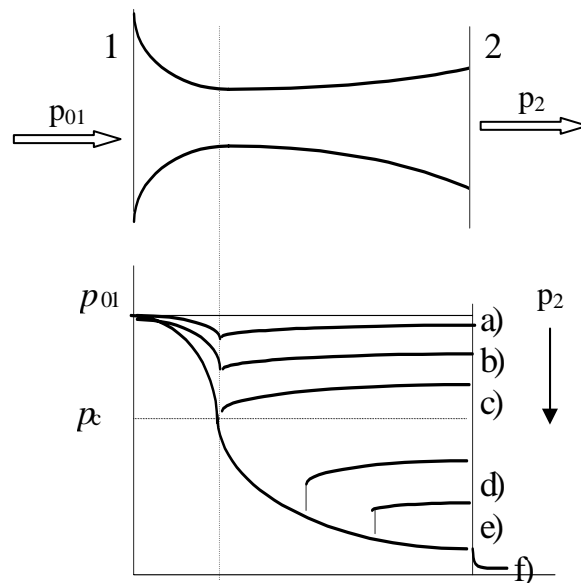


Fig. 11.16. Efflusso in un ugello di De Laval: andamenti della pressione in funzione del valore imposto a valle.

Nelle condizioni esaminate di pressione inferiore a quella critica nella sezione contratta, al diminuire della pressione imposta allo sbocco la portata di efflusso aumenta. Per un particolare valore della p_2 (curva c)) accade che nella sezione di gola si stabilisce la p_c e la velocità raggiunge il valore w_s , ma successivamente la velocità torna a diminuire e la pressione risale fino al valore imposto p_2 ; questo perché non sussistono le condizioni per una ulteriore espansione in regime supersonico e l'ugello nel suo complesso si comporta come un tubo Venturi.

Valori della pressione allo sbocco inferiori (curve d), e)) fanno osservare un diverso regime di efflusso. Nella sezione contratta si instaura la p_c e nel primo tratto del divergente la pressione continua a diminuire, in quanto il recupero di pressione ottenibile nello stesso divergente è maggiore della differenza tra la pressione imposta p_2 e la stessa p_c . Corrispondentemente si stabilisce un aumento della velocità oltre il valore w_s . Più a valle però, in una definita sezione, si realizza un brusco incremento di pressione con una discontinuità ortogonale alla direzione del moto, definita *onda d'urto normale*, tale da riportare la pressione ad un valore compatibile con quello imposto allo sbocco. Gli effetti dell'onda d'urto non si propagano a monte essendo $w > w_s$. A valle dell'onda d'urto il divergente opera come un diffusore con rallentamento del gas e recupero di pressione, essendo il regime diventato bruscamente subsonico.

Con il diminuire della pressione allo sbocco, l'onda d'urto si instaura sempre più a valle fino a sparire per un opportuno valore di p_2 che rappresenta l'optimum per il particolare ugello considerato. In queste condizioni la velocità di uscita del gas è maggiore della w_s , mentre la portata, per quanto già notato, resta fissata al valore al valore massimo corrispondente alle condizioni vigenti nella sezione contratta.

Poiché lo scopo di ugelli di questo tipo è quello di conferire al fluido la massima velocità in uscita per date condizioni di ingresso e pressioni a valle, se ne definisce l'*efficienza* mediante il rapporto tra l'energia cinetica del fluido in uscita e l'energia cinetica che il fluido avrebbe in un efflusso isoentropico:

$$\eta = \frac{(w^2 / 2)_{reale}}{(w^2 / 2)_{isoentropico}} \quad (11.41)$$

Dall'equazione di bilancio:

$$H_{01} - H_2 = \left(\frac{w_2^2}{2}\right)_{reale} \quad e \quad H_{01} - H_{2'} = \left(\frac{w_{2'}^2}{2}\right)_{isoentropico}$$

In definitiva si ha :

$$\eta = \frac{H_{01} - H_2}{H_{01} - H_{2'}} \quad (11.42)$$

Negli ugelli di efflusso l'effetto dell'attrito è limitato e valori di efficienza dell'ordine del 95% sono piuttosto comuni.

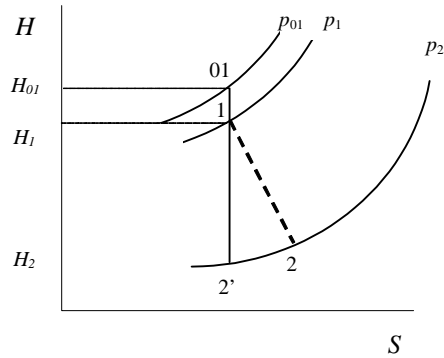


Fig. 11.17. Efflusso in un ugello di De Laval: andamenti della pressione in funzione del valore imposto a valle.

11.8.9 Flusso attraverso un'onda d'urto normale

Abbiamo visto che in certe condizioni, nel tratto divergente di un ugello supersonico può stabilirsi un'onda d'urto normale che consiste in un rapido e brusco cambiamento dello stato fisico del gas effluente. In un'onda d'urto normale questo cambiamento di stato si verifica attraverso un piano normale alla direzione del moto.

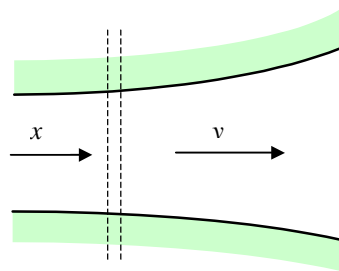


Fig. 11.18. Per determinare le condizioni a monte ed a valle di un'onda d'urto normale.

Consideriamo un piccolo volume di controllo attorno alla regione di discontinuità e per esso poniamo nulli gli scambi di calore e lavoro e le variazioni di energia potenziale. Dato il piccolo spessore della regione interessata all'onda d'urto (dell'ordine di 10^{-5} cm) si possono trascurare le forze agenti eccetto le pressioni e ritenere l'area della sezione costante. Gli stati a monte (x) ed a valle (y) del volumetto sono allora legati dalle seguenti equazioni di bilancio:

- massa $\rho_x w_x = \rho_y w_y$ (a)

- energia $H_x + \frac{w_x^2}{2} = H_y + \frac{w_y^2}{2} = H_0$ (b)

- quantità di moto $p_x - p_y = \frac{\dot{m}}{A}(w_y - w_x) = \rho_y w_y^2 - \rho_x w_x^2$ (c)

- entropia $S_y = S_x + \Delta S_s$ (d)

Tali equazioni unitamente alle relazioni termodinamiche tra le proprietà del fluido consentono di ricavare le condizioni a valle note quelle a monte. L'equazione (d), in particolare, stabilisce

che l'entropia a valle deve risultare maggiore di quella a monte per effetto delle irreversibilità.

Dalla combinazione delle relazioni (a) e (b) si ha:

$$H_0 = H + \frac{\dot{m}'^2}{2\rho^2} = \text{cost} \quad (11.43)$$

in cui $\dot{m}' = \dot{m}/A$ rappresenta la portata massica specifica (o velocità di massa). La (11.43) può interpretarsi come relazione tra quantità di stato in un deflusso adiabatico, anche in presenza di attrito, in un condotto a sezione costante. Noti i valori dell'entalpia al ristagno e della portata specifica, la (11.43) stabilisce una legame tra due variabili termodinamiche indipendenti: il luogo dei punti che rappresenta lo stato termodinamico del fluido nelle condizioni qui definite sul piano H,S prende il nome di *curva* o *linea di Fanno*.

Similmente dalle equazioni (a) e (c) si ha:

$$p + \rho w^2 = p + \frac{\dot{m}'^2}{\rho} = \text{cost} \quad (11.44)$$

La (11.44), a impulso e portata specifici costanti, costituisce una relazione tra due variabili di stato indipendenti che trasferita sul piano H,S prende il nome di *curva* o *linea di Rayleigh*. La curva di Rayleigh costituisce un modello di flusso adiabatico, privo di attrito, in un condotto a sezione costante.

Entrambe le curve di Fanno e di Rayleigh sono rappresentate nella figura seguente. Si può dimostrare che al punto di massima entropia corrisponde la condizione $M = 1$ ed inoltre che i rami superiore ed inferiore di ciascuna linea corrispondono, rispettivamente, a velocità subsoniche e supersoniche. Gli stati a monte ed a valle, x ed y , devono soddisfare le equazioni poste e pertanto appartenere ad entrambe le curve; lo stato a valle sarà caratterizzato dal valore più elevato di entropia ($S_y > S_x$).

Attraverso l'onda d'urto il regime di efflusso da supersonico diventa subsonico ed il brusco rallentamento è accompagnato da un significativo incremento della pressione. L'entalpia al ristagno non cambia, ma il processo dissipativo comporta una notevole diminuzione della pressione al ristagno.

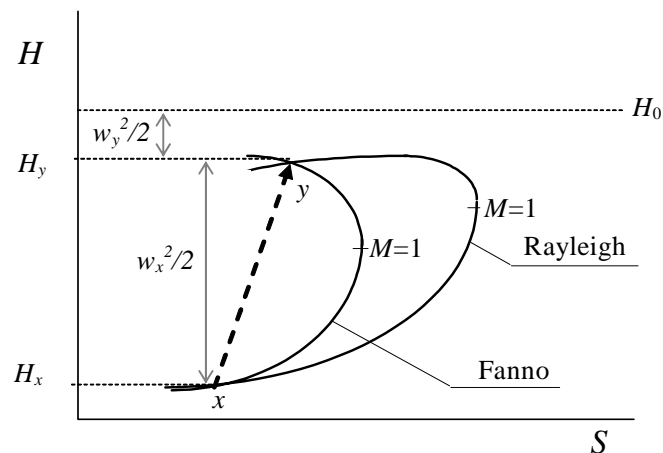


Fig. 11.19. Curve di Rayleigh e di Fanno per la determinazione degli stati termodinamici a monte ed a valle di un'onda d'urto normale.