Dipartimento di Termoenergetica e Condizionamento Ambientale

ESERCITAZIONI DI ENERGETICA 1

Per allievi ingegneri meccanici

A.A. 2003-2004

Corso di ENERGETICA 1 (Mecc) (AA 03/04)

Esercitazioni con richiami teorici

1

Conduzione
(stazionaria)

Richiami

Nella conduzione termica il calore fluisce da una regione a temperatura maggiore verso una regione a temperatura minore attraverso uno o più mezzi posti a diretto contatto fisico. L'energia si trasmette per contatto diretto fra le molecole senza che queste si spostino sensibilmente, nei solidi opachi la conduzione è il solo meccanismo di scambio termico.
Dalla teoria cinetica è noto che la temperatura di un corpo è proporzionale all'energia cinetica media delle sue molecole; quando le molecole di una regione possiedono una energia cinetica media maggiore di quella delle molecole di una regione adiacente, le prime (a maggior temperatura) cedono parte della loro energia alle molecole della regione più fredda. Il meccanismo di scambio energetico dipende dal particolare mezzo interessato al fenomeno: ad esempio, nei metalli è determinato dalla diffusione degli elettroni liberi più veloci verso le zone a temperatura minore, mentre nei fluidi lo scambio avviene per urto elastico.

La relazione fondamentale della trasmissione del calore per conduzione è stata proposta da Fourier sulla scorta di osservazioni sperimentali. Essa afferma che la potenza termica trasmessa per conduzione è pari a (caso monodimensionale):

$$q = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad [W]$$

con

k [W/mK] - conducibilità termica
A [m^2] - area della sezione attraverso la quale avviene lo scambio, misurata perpendicolarmente al flusso
dT/dx - variazione della temperatura T rispetto alla coordinata spaziale nella direzione del flusso

Questa relazione, che obbedisce alla seconda legge della termodinamica, associata alla legge di conservazione dell'energia, porta all'equazione della conduzione che, nel caso di continui omogenei, isotropi e con proprietà termofisiche costanti, assume la forma differenziale (mono-dim):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q'''$$

con

ρ [kg/m^3] - massa specifica
c [J/kgK] - calore specifico
q''' [W/m^3] - sorgente volumetrica

nel caso k e c dipendano dalla temperatura sarà invece:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q'''$$

o, in altra forma

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k(T)}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + k(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q'''$$

monodimensionale cilindriche:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q'''$$

monodimensionale sferiche:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q'''$$

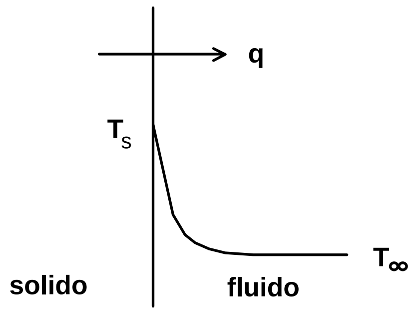
Per ciò che riguarda lo scambio termico per convezione ed irraggiamento abbiamo in breve (tanto per essere in grado di affrontare gli esercizi successivi):

convezione

$$q = h \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) \quad [W] \qquad \text{Newton}$$

con

h [W/m^{2}K] - coefficiente di scambio termico per convezione
T_s - Temperatura di parete
T_∞ - Temperatura del fluido indisturbato



irraggiamento

$$q_{1\leftrightarrow 2} = \sigma \cdot A_1 \cdot \mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2} \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad [W]$$

σ= 5.67·10^{-8} [W/m^{2}K^4] costante di Stefan-Boltzman
$\mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2}$ fattore funzione della geometria e dell'emissività ε dei due corpi
ε- emissività

nel caso di un piccolo corpo con emissività ε_1 racchiuso in una cavità con $A_2 >> A_1$ si ha:

$$\mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2} = \varepsilon_1$$

Per due cilindri concentrici indefiniti o due sfere concentriche

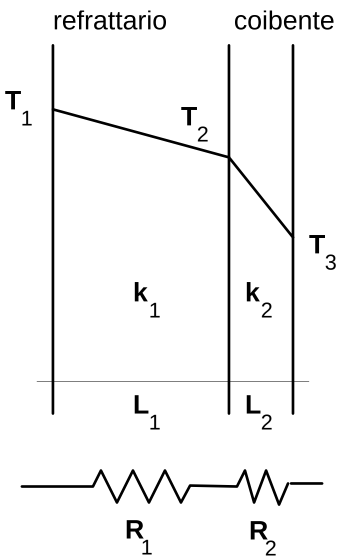
$$\mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{A_1}{A_2}\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

dove il pedice (1) si riferisce alla sup interna.
Per due piastre parallele indefinite:

$$\mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

***Esercizio* 1**

Un forno industriale è costituito da pareti di mattoni refrattari, dello spessore di 20 cm. aventi conduttività termica pari a k_1= 1.0 [W/mK]. La superficie esterna del forno deve essere coibentata con un materiale con conduttività termica k_2=0.05 [W/mK]. Determinare lo spessore dell'isolamento necessario per limitare il flusso termico specifico disperso dalle pareti al valore di 900 [W/m^2] quando la temperatura interna del refrattario è T_1=900 °C, e quella esterna dell'isolante vale T_3=30 °C. Determinare inoltre la temperatura T_2 all'interfaccia fra i due materiali.



T_1= 930 °C
T_3= 30 °C

$$q = \frac{T_1 - T_3}{R_{tot}} \qquad R_{tot} = R_1 + R_2$$

$$R_1 = \frac{L_1}{k_1 A} \qquad R_2 = \frac{L_2}{k_2 A}$$

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A}}; \qquad \frac{q}{A} = q' = \frac{T_1 - T_3}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

Dobbiamo determinare L_2:

$$L_2 = k_2\left[\frac{T_1 - T_3}{q'} - \frac{L_1}{k_1}\right] = 0.05\left[\frac{900}{900} - \frac{0.2}{1.0}\right] = 0.04[m]$$

Consideriamo ad esempio il refrattario:

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{L_1 / k_1} \qquad T_1\text{-}T_2 = 900\cdot0.2/1.0 = 180\ °\text{C} \qquad T_2 = 750\ °\text{C}$$

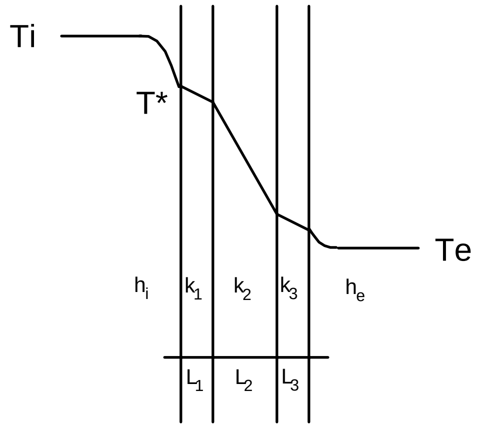
***Esercizio* 2**

Una finestra con doppio vetro è costituita da due lastre di vetro dello spessore di 5 [mm] separate da uno strato di aria stagnante dello spessore di 10 [mm]. La conduttività termica del vetro è 0.78 [W/mK] e quella dell'aria è 0.025 [W/mK]. Il coefficiente convettivo interno (vetro-aria ambiente) vale 10 [W/m^{2}K] mentre quello esterno (vetro-aria esterna) vale 50 (W/m^{2}K). Si richiede:

1) Determinare il flusso termico disperso per unità di area dalla finestra sapendo che la $T_{interna}$ vale 25 °C e la $T_{esterna}$ -35 °C.

2) Comparare il risultato con quello che si otterrebbe utilizzando una finestra composta da un unico strato di vetro spesso il doppio (10 mm).

3) Calcolare nei due casi la temperatura T^* della superficie del vetro lato ambiente.



1)

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{1/h_i + L_1/k_1 + L_2/k_2 + L_3/k_3 + 1/h_e}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{60}{1/10 + 0.005/0.78 + 0.01/0.025 + 0.005/0.78 + 1/50} = 112.6\left[W/m^2\right]$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T^*}{1/h_i}; \qquad T^* = T_i - \frac{q}{Ah_i} = 25 - \frac{112.6}{10} = 13.7[^\circ C]$$

2)

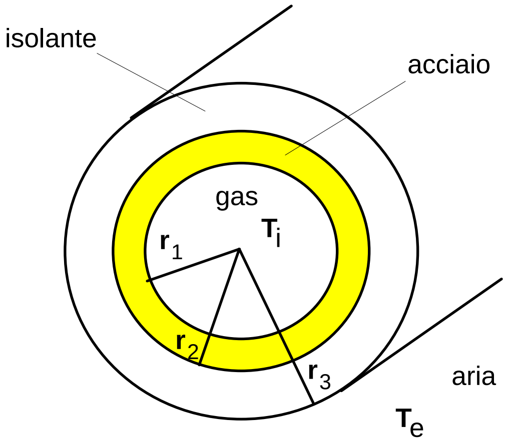
$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{1/h_i + 2L_1/k_1 + 1/h_e} = \frac{60}{1/10 + 0.01/0.78 + 1/50} = 451.7\left[W/m^2\right]$$

$$T^* = 25 - \frac{451.7}{10} = -20.2[^\circ C]$$

***Esercizio* 3**

Un tubo d'acciaio (k_1=15 [W/mK]) del diametro esterno D_e= 7.6 cm e dello spessore s_1= 1.3 cm è ricoperto con un materiale isolante (k_2= 0.2 [W/mK]) dello spessore s_2= 2 cm. Un gas caldo alla temperatura di 320 °C e con un coefficiente di scambio termico pari a 200 [W/m^{2}K] fluisce all'interno del tubo. La superficie esterna dell'isolante è esposta all'aria alla temperatura di 20 °C, coeff. di scambio termico 50 [W/m^{2}K]. Calcolare:

1) Il flusso termico disperso per un tubo lungo 5 m.
2) le cadute di temperatura
   - a- nel gas
   - b- nell'acciaio
   - c- nell'isolante
   - d- nell'aria esterna



T_i= 320 °C
T_e= 20 °C

h_i= 200 [W/m^{2}K]
k_1= 15 [W/mK]
k_2= 0.2 [W/mK]
h_e= 50 [W/m^{2}K]

r_2=D_e/2 = 3.8 cm
r_1=r_2-s_1 = 2.5 cm
r_3=r_2+s_2= 5.8 cm

$$R_i = \frac{1}{2\pi r_1 L h_i} = \frac{1}{2\pi \cdot 0.025 \cdot 5 \cdot 200} = 6.37 \cdot 10^{-3} \left[KW^{-1}\right]$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi L k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 15} \ln \frac{3.8}{2.5} = 0.89 \cdot 10^{-3} \left[KW^{-1}\right]$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi L k_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 0.2} \ln\left(\frac{5.8}{3.8}\right) = 67.3 \cdot 10^{-3} \left[KW^{-1}\right]$$

$$R_e = \frac{1}{2\pi r_3 L h_e} = \frac{1}{2\pi \cdot 0.058 \cdot 5 \cdot 50} = 10.98 \cdot 10^{-3} \left[KW^{-1}\right]$$

$$q = \frac{T_i - T_e}{R_{tot}} \qquad R_{tot} = R_i + R_1 + R_2 + R_e$$

$$q = \frac{\Delta T_j}{R_j}$$

R_{tot} = (6.37 + 0.89 + 67.3 + 10.98)·10^{-3}= 85.54·10^{-3} [KW^{-1}]

$$q = \frac{300}{85.54 \cdot 10^{-3}} = 3.5\,[kW]$$

$$\Delta T_{gas} = 3500 \cdot 6.37 \cdot 10^{-3} = 22.3\,[K]$$

$$\Delta T_{acciaio} = 3500 \cdot 0.89 \cdot 10^{-3} = 3.1\,[K]$$

$$\Delta T_{isolante} = 3500 \cdot 67.3 \cdot 10^{-3} = 235.6\,[K]$$

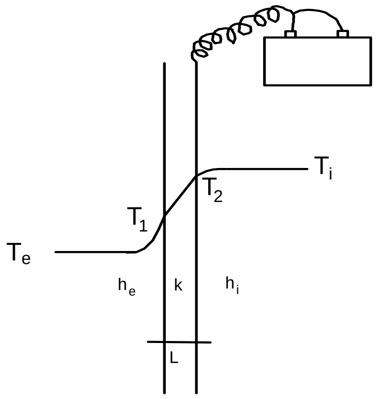
$$\Delta T_{aria} = 3500 \cdot 10.98 \cdot 10^{-3} = 38.43\,[K]$$

***Esercizio* 4**

Il lunotto posteriore di un'autovettura è attrezzato con un sistema anti-appannamento strutturato come dalla seguente figura. Un foglio di spessore trascurabile, applicato sulla faccia interna del lunotto è riscaldato elettricamente. Sapendo che la temperatura del foglio è pari a 18 °C mentre le temperature all'interno ed all'esterno dell'autovettura valgono rispettivamente T_i= 20 °C e T_e= 10 °C, calcolare la potenza dispersa dall'interno attraverso il lunotto nei due casi a) resistore spento , b) resistore acceso. Calcolare inoltre la potenza per metro quadro dissipata dalla resistenza.

Si assumano i seguenti dati :

- spessore vetro L=0.04 [m]
- conduttività vetro 0.78 [W/mK]
- coefficiente globale di scambio con l'esterno 35 [W/m^{2}K]
- coefficiente globale di scambio con l'interno 10 [W/m^{2}K]



$$\left.\frac{q}{A}\right)_{\text{spento}} = q'_{\text{sp}} = \frac{T_{\text{i}} - T_{\text{e}}}{1/h_{\text{e}} + L/k + 1/h_{\text{i}}} = \frac{20-10}{1/35 + 0.04/0.78 + 1/10} = 55.6\left[W/m^2\right]$$

Dai dati a nostra disposizione siamo in grado di calcolare i flussi specifici lato interno e lato esterno rispetto al riscaldatore.

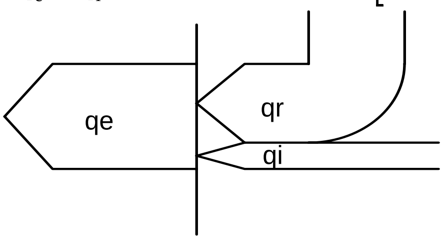
$$\left.\frac{q}{A}\right)_{\text{e}} = q'_{\text{e}} = \frac{T_2 - T_e}{1/h_e + L/k} = \frac{18-10}{1/35 + 0.04/0.78} = 100.2\left[W/m^2\right]$$

$$\left.\frac{q}{A}\right)_{\text{i}} = q'_{\text{i}} = \frac{T_i - T_2}{1/h_{\text{i}}} = \frac{20-18}{1/10} = 20\left[W/m^2\right]$$

(che rappresenta anche la potenza dispersa dall'interno, a riscaldatore acceso)

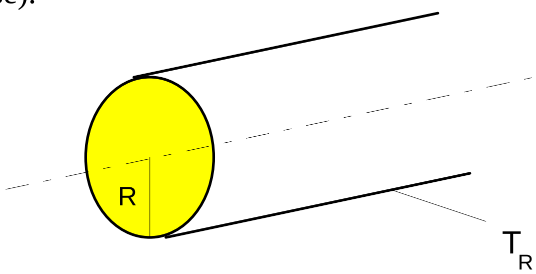
Il contributo del resistore vale quindi:

$$q'_{\text{r}} = q'_{\text{e}} - q'_{\text{i}} = 100.2 - 20 = 80.2\left[W/m^2\right]$$



***Esercizio 5* (domanda orale)**

Un filo di cromel-nickel del diametro di 3 mm e conduttività termica k= 20 [W/mK] è riscaldato elettricamente dal passaggio di corrente elettrica, la quale provoca una generazione di calore uniforme pari a q'''= 10^9 [W/m^3]. Se la superficie del filo è mantenuta alla temperatura di 100 °C determinare la temperatura che si stabilisce al centro del filo (sull'asse).



Eq. conduzione in coordinate cilindriche (filo di lunghezza infinita)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q'''$$

regime permanente ($\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q'''}{k} \qquad \begin{cases} r = 0 \rightarrow \frac{dT}{dr} = 0 \\ r = R \rightarrow T = T_R \end{cases}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{rq'''}{k} \quad \rightarrow \quad r\frac{dT}{dr} = -\frac{r^2 q'''}{2k} + C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{rq'''}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

In r=0 T finita e $\frac{dT}{dr} = 0$; segue C_1=0

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{rq'''}{2k} \rightarrow T = -\frac{r^2 q'''}{4k} + C_2$$

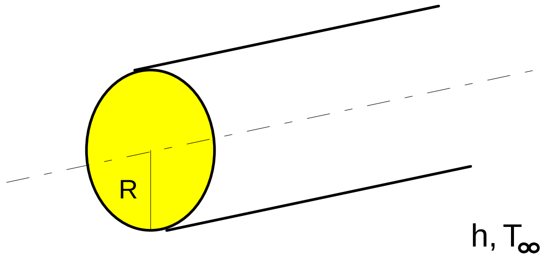
in r=R T=T_R; segue $C_2 = T_R + \frac{R^2 q'''}{4k}$

$$T = T_R + \frac{q''' R^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \rightarrow \quad \frac{T - T_R}{q''' R^2 / 4k} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$T_{\text{asse}} = T_{\max} = T_R + \frac{q''' R^2}{4k} = 100 + \frac{10^9 \cdot (1.5 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 20} = 128.13\ °C$$

***Esercizio* 6 (domanda orale)**

Una barra cilindrica di combustibile nucleare per un reattore refrigerato a gas ha raggio R= 1 cm e conduttività termica k= 10 [W/mK]. Il gas refrigerante ha una temperatura di 350 °C ed il coefficiente di scambio termico convettivo vale h=100[W/m^{2}K] . Nell'ipotesi di poter considerare uniforme il calore generato all'interno dell'elemento di combustibile nucleare per effetto della fissione e pari a q'''= 6106 [W/m^3], calcolare la temperatura massima che si stabilisce all'interno della barra di combustibile.



$$0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{q'''}{k} \qquad \begin{cases} r = 0 \rightarrow \dfrac{dT}{dr} = 0 \\ r = R \rightarrow -k\dfrac{dT}{dr} = h(T(R) - T_\infty) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{rq'''}{k} \quad \rightarrow \quad r\frac{dT}{dr} = -\frac{r^2q'''}{2k} + C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{rq'''}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

In r=0 T finita e $\frac{dT}{dr} = 0$; segue C_1=0

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{rq'''}{2k} \quad \rightarrow \quad T = -\frac{r^2q'''}{4k} + C_2$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_R = -\frac{Rq'''}{2k} \qquad T(R) = -\frac{R^2q'''}{4k} + C_2$$

$$k\frac{Rq'''}{2k} = h\left(C_2 - \frac{R^2q'''}{4k} - T_\infty\right)$$

$$C_2 = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} + \frac{q'''R^2}{4k}$$

avremo in definitiva

$$T = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} + \frac{q'''R^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

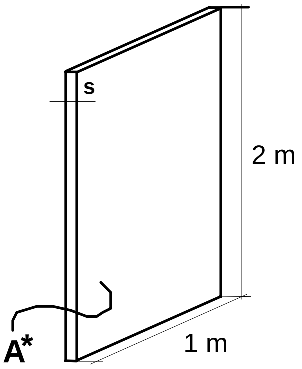
La temperatura massima si stabilisce sull'asse e corrisponde a C_2:

$$T_{\max} = 350 + \frac{6\cdot10^6\cdot0.01}{2\cdot100} + \frac{6\cdot10^6\cdot0.01^2}{4\cdot10} = 665\ °C$$

***Esercizio* 7**

Una lamiera in ferro delle dimensioni 1 m x 2 m x 0.003 m, inizialmente alla temperatura di 300 °C viene refrigerata in aria ambiente (temperatura aria: 20 °C). Il coeff. di scambio termico globale medio vale *h* = 30 [W/m^{2}K]. La conduttività termica della lamiera è *k*=45 [W/mK], la densità ρ= 7800 [kg/m^3] ed il calore specifico *c*= 480 [J/kgK].

Calcolare il tempo impiegato per raggiungere la temperatura di 50 °C, calcolare il calore complessivo ceduto all'aria fino a quell'istante.



Controllo numero di Biot:

$$B_i = \frac{hL_{eq}}{k} \qquad L_{eq} = \frac{V}{A} \cong \frac{A^* \cdot s}{2 \cdot A^*} = s/2$$

$$B_i = \frac{30 \cdot 0.0015}{45} = 0.001 << 0.1 \quad ok$$

$$dU = q \cdot dt$$

$$cMdT = hA\left[T_\infty - T(t)\right]dt$$

$$\rho cV \frac{dT}{dt} = -hA\left[T - T_\infty\right]$$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho cV}dt$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{d(T' - T_\infty)}{T' - T_\infty} = -\int_{t_0}^{t} \frac{hA}{\rho cV} d\tau \qquad \ln\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho cV}(t - t_0)$$

assumendo t_0=0 e chiamando τ (costante di tempo) il rapporto ρ*cV*/*hA*, (τ= 187.2) scriviamo:

$$\ln\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{t}{\tau}$$

il tempo necessario affinché *T*= 50 °C sarà

$$t_{50} = -\frac{\rho cV}{hA}\ln\frac{50 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{7800 \cdot 480 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.003}{30 \cdot 4}\ln\frac{50 - 20}{300 - 20} = 418.2[s] \cong 7'$$

Troviamo il calore ceduto in questo periodo di tempo:

$$Q = \rho cV \cdot \left[T_i - 50\right] = 7800 \cdot 480 \cdot 0.006 \cdot [250] = 5.6 \cdot 10^6 \; [J]$$

Si può anche procedere in un altro modo (non consigliato):

$$Q = \int_0^{t_{50}} hA\left[T - T_\infty\right]dt = \int_0^{t_{50}} hA\left[T_0 - T_\infty\right] \cdot e^{-t/\tau}dt = hA \cdot \tau \cdot \left[T_0 - T_\infty\right]\left(1 - e^{-t_{50}/\tau}\right)$$

$$= hA \cdot \frac{\rho c V}{hA} \cdot \left[T_0 - T_\infty\right]\left(1 - e^{-t_{50}/\tau}\right) = \rho c V \cdot \left[T_0 - T_\infty\right]\left(1 - e^{-t_{50}/\tau}\right)$$

$$= 7800 \cdot 480 \cdot 0.006 \cdot [280]\left(1 - e^{-418.2/187.2}\right) = 5.6 \cdot 10^6 \; [J]$$

***Esercizio* 8**

Una cartolina elettronica delle dimensioni 0.2x0.1x0.003 [mxmxm] si trova inizialmente alla temperatura dell'aria ambiente T_a= 20 °C.

Durante il funzionamento essa dissipa una potenza elettrica pari a 30 [W] ed è refrigerata in convezione naturale dall'aria con un coeff. di scambio termico (medio) h= 8 [W/m^{2}K]. Nell'ipotesi di trascurare la resistenza termica conduttiva interna della cartolina e di assumere uniformemente distribuito il flusso termico dissipato, valutare la temperatura della cartolina dopo 100 [s] dall'inizio del transitorio ed a regime. Determinare la costante di tempo del transitorio.

Si assumano le seguenti proprietà termofisiche medie per la cartolina:

ρ= 2700 [kg/m^3]; c=1000 [J/kg K]

A regime la potenza termica prodotta per effetto Joule deve essere uguale a quella dispersa per convezione:

$$P = hA(T_{\max} - T_a)$$

per cui

$$T_{\max} = T_a + \frac{P}{hA} \cong 20 + \frac{30}{8 \cdot (0.2 \cdot 0.1 \cdot 2)} = 113.7 \left[{}^\circ C\right]$$

Per ciò che riguarda la costante di tempo sappiamo che:

$$\tau = \frac{\rho c V}{hA} = \frac{2700 \cdot 1000 \cdot (0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.003)}{8 \cdot (0.2 \cdot 0.1 \cdot 2)} = 506[s] = 8.43\,'$$

Il sistema ha risposta transitoria

$$\frac{T - T_a}{T_{\max} - T_a} = 1 - e^{-\frac{t - t_0}{\tau}}$$

per cui se t-t_0= 100 [s] avrò:

$$T = 20 + (113.7 - 20)(1 - e^{-\frac{100}{506}}) = 36.8 \quad \left[{}^\circ C\right]$$

Esercizio 9 **(domanda orale)**

a) Sia data una lastra piana di spessore *L* con conducibilità termica dipendente dalla temperatura $k=k(T)$. La temperatura sulle due facce della lastra valga T_1 e T_2 rispettivamente (sn e dx). Calcolare la conducibilità equivalente (e res. termica equivalente). Si consideri il sistema a regime.

$$q = k_{eq} A \frac{T_1 - T_2}{L}$$

ovvero

$$k_{eq} = \frac{qL}{A(T_1 - T_2)} \qquad (*)$$

occorre valutare q e (T1 - T2)

$$q = -k(T) A \frac{dT}{dx} \qquad qdx = -Ak(T)dt \qquad q\int_1^2 dx = -A\int_1^2 k(T)dT$$

q e costante nello spazio perché siamo a regime (altrimenti si avrebbe accumulo e variazione di energia interna e quindi di temperatura).

$$q = -A\frac{1}{L}\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT$$

Sostituendo nella (*) si ottiene:

$$k_{eq} = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT$$

ovvero una media integrale di k fra le temperature T_1 e T_2.

Sarà poi

$$R_{t\,eq} = \frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{L}{k_{eq}A}$$

b) come caso precedente ma $k=k(x)$

$$q = -k(x) A \frac{dT}{dx} \qquad q\frac{dx}{k(x)} = -Adt \qquad q\int_1^2 \frac{dx}{k(x)} = -A\int_1^2 dT$$

$$q = A\frac{T_1 - T_2}{\int_0^L \frac{dx}{k(x)}}$$

Sostituendo nella (*) si ottiene:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L}\int_0^L \frac{dx}{k(x)}}$$

che è una media integrale armonica.

Esercizio 10 **(domanda orale)**

Determinare la distribuzione di temperatura a regime in una lastra piana di spessore L con conducibilità termica $k=k(T)=k_0 + k_1\, T$.

Dall'esercizio precedente q vale

$$q = -A\frac{1}{L}\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT = -A\frac{1}{L}\int_{T_1}^{T_2} (k_0 + k_1 \cdot T)dT = \frac{A}{L}\cdot\left[k_0(T_1 - T_2) + k_1\frac{T_1^2 - T_2^2}{2}\right] = q\,*$$

ripetendo l'integrazione fra la faccia di sinistra ed un punto generico x si ottiene:

$$q\,*\int_1^x dx = -A\int_{T_1}^{T} k(T)dT \qquad q* = -A\frac{1}{x}\int_{T_1}^{T_x} (k_0 + k_1 \cdot T)dT = \frac{A}{x}\cdot\left[k_0(T_1 - T_x) + k_1\frac{T_1^2 - T_x^2}{2}\right]$$

tale equazione rappresenta una parabola in T ovvero una funzione del tipo:

$$x = aT^2 + bT + c$$

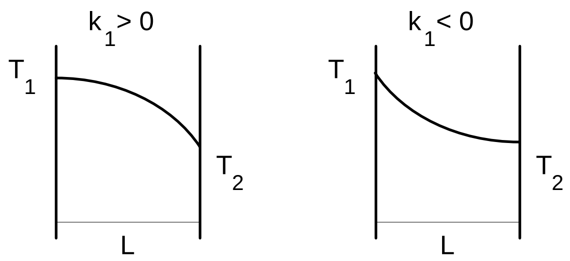
in particolare(con T al posto di T_x)

$$x = \frac{A}{q\,*}\cdot\left[k_0(T_1 - T) + k_1\frac{T_1^2 - T^2}{2}\right]$$

e, mettendo il valore di q*:

$$\frac{x}{L} = \frac{k_0(T_1 - T) + k_1\dfrac{T_1^2 - T^2}{2}}{k_0(T_1 - T_2) + k_1\dfrac{T_1^2 - T_2^2}{2}}$$

Andamento qualitativo campo termico



Ad esempio nel caso in cui $k_1>0$ la conducibilità è maggiore ad alte T, quindi in x=0. Di conseguenza sarà minore, in modulo, *dT/dx* (in quanto q è costante).

Corso di ENERGETICA 1 (Mecc) (AA 03/04)

Esercitazioni con richiami teorici

2

Convezione

richiami

La convezione è un meccanismo di trasporto dell'energia termica che si attua mediante la combinazione di:

- conduzione
- accumulo di energia
- mescolamento.

E' il più importante meccanismo di scambio termico fra una superficie solida ed un fluido. Dapprima il calore passa per conduzione dalla superficie alle particelle fluide adiacenti da cui l'aumento di temperatura di queste. Il movimento trasporta poi le particelle fluide in zone a minor temperatura con conseguente scambio di energia.
A seconda delle cause che determinano il moto anzidetto si distingue fra convezione libera (naturale) e forzata. Nella prima il moto è causato da differenze di densità dovute a gradienti di temperatura, nella seconda il moto è indotto da un agente esterno. Siccome l'efficacia della convezione dipende in larga misura dal moto del fluido è necessario lo studio fluidodinamico del sistema

Usualmente, la potenza termica (W) scambiata per convezione tra una superficie ed un fluido si esprime mediante la seguente:

$$q_c = \bar{h}_c \ A \ \Delta T \qquad (1)$$

- q_C [W] potenza termica
- A [m^2] area superficie di scambio
- $\Delta T = T_s - T_\infty$ [K] temperatura della superficie meno temperatura in punto specificato (solitamente lontano dalla parete)
- $\bar{h}_c$ [Wm^{-2}K^{-1}] valore medio del coefficiente di scambio termico convettivo.

Il coeff. locale h_c è definito da $dq_c = h_c \, dA \, (T_s - T_\infty)$ per cui:

$$\bar{h}_c = \frac{1}{A} \int_A h_c dA$$

L'eq. (1) rappresenta una definizione per $\bar{h}_c$ piuttosto che una legge fisica dello scambio termico per convezione. $\bar{h}_c$ sarà una funzione complessa della fluidodinamica, delle proprietà termiche del fluido e dalla geometria del particolare sistema considerato.
Uno degli aspetti più importanti dell'analisi fluidodinamica è quello di stabilire se il moto è *laminare* o *turbolento*.
Nel 1° caso il fluido si muove a strati e l'energia (termica) si trasmette solo per conduzione all'interno del fluido e all'interfaccia solido-fluido. Non si hanno correnti di mescolamento. Nel moto turbolento, invece, il meccanismo di scambio è favorito da vortici che trasportano gruppi di particelle di fluido attraverso le linee di corrente. Queste particelle agiscono come trasportatori di energia.

Strato limite

Indipendentemente dal tipo di moto le particelle vicine alla superficie sono rallentate da forze viscose e quelle adiacenti ad essa vi aderiscono. Un siffatto gradiente di velocità da luogo ad uno sforzo di taglio pari a :

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}$$

con

τ- sforzo tangenziale [N/m^2]

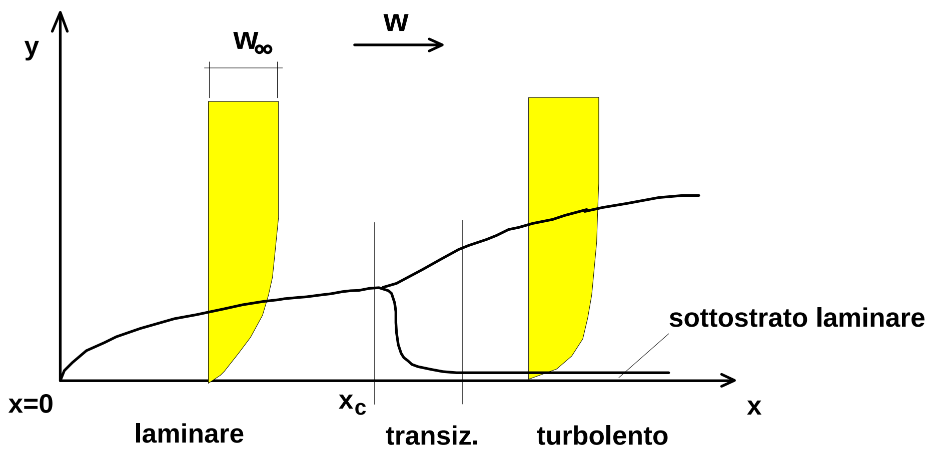
w- velocità [m/s]

y distanza dalle parete [m]

μ- viscosità dinamica [ ]

Lo spessore dello strato limite è definito come la distanza dalle superficie alla quale la velocità assume un valore pari al 99 % di quello della vel. indisturbata. Mediante l'introduzione di questo concetto risulta possibile porre in forma risolubile le eq. di Navier Stokes, calcolare le forze di attrito, etc.

Nel caso esemplificativo di un flusso d'aria su lastra piana parallela alla corrente, lo spessore dello strato limite ed i profili di velocità assumono la forma seguente:



La distanza alla quale lo strato limite cessa di essere laminare è detta x critico e viene espressa tramite una grandezza adimensionale detta n° locale di Reynolds

$$R_{e\,c} = \frac{\rho w_\infty x_c}{\mu} = \frac{w_\infty x_c}{\nu}$$

che è un indice del rapporto fra forze di massa e forze viscose. Se queste ultime sono prevalenti (ovvero $R_e > R_{e\,c}$) si ha moto laminare, altrimenti turbolento. L'andamento dello spessore dello S.L. dipende da $x^{1/2}$ se il moto è laminare e da $x^{4/5}$ nel caso turbolento. La transizione fra regime laminare e turbolento dipende, a parità di geometria e fluido, dall'entità dei disturbi all'interno della corrente che sono causati principalmente da:

1) disturbi già presenti nella corrente *indisturbata*.

2) rugosità della superficie.

3) modalità di scambio termico.

In condizioni medie la transizione per piastra piana avviene per $R_{e\,c} \approx 5 \cdot 10^5$.

Scambio termico

Nello studio dello scambio termico per convezione si possono seguire differenti approcci:

1) La soluzione analitica delle equazioni dello strato limite
2) Lo studio approssimato dello strato limite con metodi integrali
3) L'analisi dimensionale combinata con esperimenti
4) L'analogia fra trasporto di calore, materia e quantità di moto

1)- La soluzione matematica esatta delle equazioni dello S.L. richiede la soluzione simultanea delle equazioni del moto e del trasporto di energia nel fluido. Occorre sottolineare che una descrizione matematica completa è possibile solo per il regime laminare e, anche per questo, le equazioni sono molto complesse e sono state risolte solo in un numero ristretto di sistemi semplici come ad esempio nel caso di moto su lastra piana. Le equazioni necessarie sono:

- Eq. di continuità
- Eq. quantità di moto
- Eq. energia

Lo sviluppo dei calcolatori elettronici ha allargato molto il campo dei problemi trattabili matematicamente anche se la soluzione risultante è numerica.

2)- Lo studio approssimato dello strato limite parte dall'assegnazione di una funzione plausibile per descrivere la distribuzione di velocità e temperatura. I risultati ottenuti con tale metodo ben si accordano con le soluzioni esatte nei casi in cui queste siano disponibili; inoltre questo tipo di analisi approssimata è fattibile anche in condizioni di regime turbolento.

Nello studio approssimato dello strato limite, invece di scrivere le eq. differenziali del caso (con riferimento quindi ad un volume di controllo infinitesimo) si considera un volume di controllo finito opportuno pervenendo ad equazioni integrali nelle quali vengono assegnate delle ragionevoli distribuzioni di temperatura e velocità. La soluzione di tali eq. porterà ad espressioni per h_c.

3)- L'analisi dimensionale, combinata con esperimenti, sebbene fornisca pochi contributi alla comprensione del fenomeno fisico, rende agevole la sua descrizione tramite correlazioni generali. Attraverso il teorema π di Buckingam è infatti possibile ridurre le variabili che influenzano il fenomeno ad un numero accettabile per il progetto di una campagna sperimentale parametrica che conduca a correlazioni fra pochi gruppi adimensionali. Nella ricerca di una espressione per $\overline{h}_c$, sebbene questo sia funzione di 6 variabili, risulta possibile correlare i dati sperimentali mediante 3 gruppi adimensionali indipendenti. Si parte da una espressione del tutto generale del tipo:

$$\overline{h}_c = f(D, k, w, \rho, \mu, c_p) \qquad \backslash \text{ caso di un tubo}$$

D - diametro tubo
k - conducibilità termica fluido
w - velocità
ρ - densità
μ- viscosità dinamica
c_p- calore specifico a p=cost.

che mette in relazione 7 variabili. Con un procedimento analogo a quello visto per le perdite di carico ($\lambda = \lambda(R_e, \varepsilon/D)$) si perviene alla relazione:

$$\overline{N}_u = f(R_{e\,\mathrm{D}}, P_r)$$

che utilizza solo 3 gruppi adimensionali

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c \cdot D}{k} \quad \text{numero di Nusselt}$$

$$R_e = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\mu} \quad \text{numero di Reynolds}$$

$$P_r = \frac{c_p \cdot \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{numero di Prandtl}$$

e risulta solitamente realizzata nella classica forma

$$\overline{N}_u = C \cdot R_{e\,\mathrm{D}}^{n} \cdot P_r^{m}$$

4) L'analogia fra trasporto di calore, materia e quantità di moto è infine particolarmente impiegata per analizzare i fenomeni di trasporto turbolento. Quest'ultimo è descritto mediante modelli semplificati e, secondo uno di questi, tanto il trasporto del calore quanto quello della quantità di moto sono dovuti ad un moto di mescolamento in direzione normale a quella prevalente. Il moto di mescolamento può essere descritto su base statistica con un metodo simile a quello usato per descrivere il moto delle molecole nella teoria cinetica dei gas.

<u>Convezione naturale</u>

Nella convezione naturale la fisica del problema comporta che la velocità del fluido non è più una quantità indipendente in quanto dipende dalla forza ascensionale che obbedisce alla legge di Archimede ed è in relazione al coefficiente di dilatazione β del fluido definito come:

$$v = v_\infty\left[1 + \beta(T - T_\infty)\right] \quad \text{ovvero} \quad \beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

per i gas perfetti, ad esempio, risulta (a p= cost.)

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}$$

Ciò comporta l'introduzione del numero adimensionale G_r (numero di Grashof)
che rappresenta il rapporto fra forze ascensionali e viscose.

$$G_r = \frac{\rho^2 g \beta (T - T_\infty) L^3}{\mu^2}$$

I risultati sperimentali in convezione libera (naturale) possono essere correlati da una equazione del tipo:

$$\overline{N}_u = \varphi(G_r) \cdot \psi(P_r)$$

Per gas aventi la stessa atomicità il numero di P_r e costante, avremo quindi

$$\overline{N}_u = \varphi(G_r)$$

Nel caso siano trascurabili le forze di inerzia il parametro di similitudine è il prodotto $G_r{\cdot}P_r$ (R_a - numero di Rayleigh) e si avrà:

$$\overline{N}_u = \varphi(R_a)$$

Quando il rapporto $\frac{G_r}{R_e^2}$ è maggiore di 1 gli effetti della spinta ascensionale non possono essere trascurati rispetto alla convezione forzata.

Convezione forzata all'interno di tubi e condotti

Come sempre la potenza termica scambiata si esprime con una espressione del tipo:

$$q_c = \bar{h}_c \; A\,(T_{\mathrm{sup}} - T_{\mathrm{fluido}})$$

$\bar{h}_c$ si ricava dal numero di Nusselt $\bar{h}_c \cdot D_{eq} / k$ dove, per tubi lunghi

$$D_{eq} = 4 \cdot \frac{\text{area della sezione normale al moto}}{\text{perimetro bagnato}}$$

Come temperatura del fluido si assume T_{m}, temperatura di massa, detta anche temperatura di mescolamento in tazza. Questo permette di fare rapidamente i bilanci termici poiché a regime permanente la variazione di T_{m} fra due sezioni è proporzionale alla potenza termica scambiata:

$$q = Gc_p \Delta T_m$$

matematicamente Tm è definita in termini di energia termica:

$$T_m = \frac{\int_A c_v T dG}{\int c_v dG} = \frac{\int_A \rho w c_v T dA}{\int \rho w c_v dA}$$

Se c_{v} può essere considerato costante

$$T_m = \frac{\int_A \rho w T dA}{G}$$

Se inoltre il fluido è incompressibile

$$T_m = \frac{\int_A w T dA}{G_v} = \frac{\int_A w T dA}{A u_m}$$

Se la temperatura di parete della condotta è costante si pone $T_{\mathrm{fluido}} = T_{\mathrm{f}}$

$$T_f = \frac{T_{m\,\mathrm{ingresso}} + T_{m\,\mathrm{uscita}}}{2}$$

Le proprietà termofisiche del fluido vanno invece calcolate alla temperatura media del film ovvero

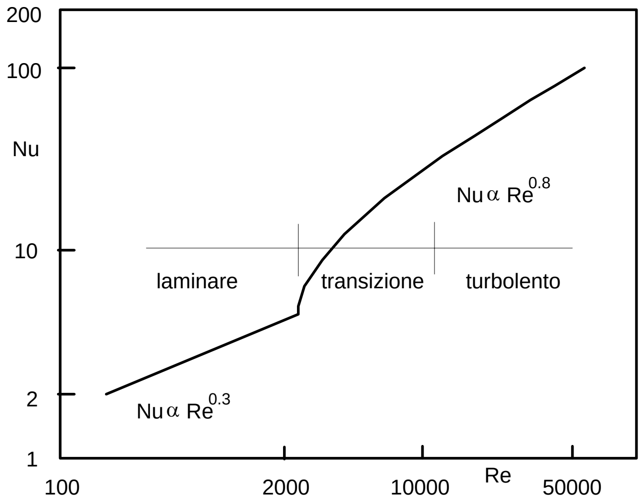
$$T^* = \frac{T_{\mathrm{fluido}} + T_{\mathrm{sup}}}{2}$$

Influenza del numero di Reynolds

Assegnato il fluido (fissato quindi P_{r}) il numero di Nusselt dipende da R_{eD}. In condotti lunghi (ovvero trascurando gli effetti di imbocco) la transizione fra moto laminare e turbolento si ha per

$$\boxed{2100 < R_{e\,\mathrm{D}} < 10000}$$

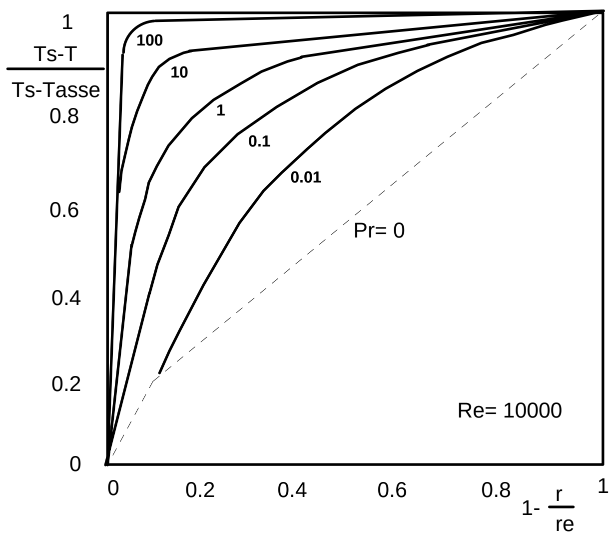
Il meccanismo di scambio termico risulta favorito dalle condizioni turbolente come si nota nel seguente diagramma (aria in un tubo):



Un aumento del coeff. di scambio si ottiene quindi aumentando la turbolenza in modo che i vortici penetrino maggiormente nel sottostrato laminare. Ciò si può ottenere tramite vorticatori e aumentando la velocità ma si avrà un aumento della potenza di pompaggio richiesta a causa delle perdite per attrito.

Influenza del numero di Prandtl

Il numero di Prandtl è funzione solo delle proprietà del fluido e correla la distribuzione di temperatura alla distribuzione di velocità.
I profili di temperatura e velocità sono simili per fluidi aventi Pr unitario.
Se Pr <<1 allora il gradiente di temperatura è minore di quello di velocità in prossimità della parete; se Pr >>1 avviene il contrario.



Alcune correlazioni per moto su piastra piana (conv. naturale)

sup verticale

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c L}{k} = .555 \cdot R_a^{1/4} \qquad 10 < R_a < 10^9$$

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c L}{k} = .13 \cdot R_a^{1/3} \qquad R_a > 10^9$$

sup orizz. (faccia calda verso l'alto)

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c L}{k} = .54 \cdot R_a^{1/4} \qquad 10^5 < R_a < 2 \cdot 10^7$$

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c L}{k} = .14 \cdot R_a^{1/3} \qquad 2 \cdot 10^7 < R_a < 3 \cdot 10^{10}$$

sup orizz. (faccia calda verso il basso)

$$\overline{N}_u = \frac{\overline{h}_c L}{k} = .27 \cdot R_a^{1/4} \qquad 3 \cdot 10^5 < R_a < 3 \cdot 10^{10}$$

semplici applicazioni
(con elementi di irraggiamento)

***Esercizio* 1**

Si vuole misurare la temperatura dell'aria all'esterno di un locale. Per realizzare questa operazione si dispone di un termometro a capillare, inizialmente alla temperatura di 20 °C. Il termometro può essere immaginato come un cilindro di vetro (conducibilità termica 1.1 W/mK, densità 2200 kg/m^3, calore specifico 750 J/kgK) alto 10 cm ed avente diametro di 3 mm; la temperatura esterna è di 8 °C, lo scambio termico è convettivo forzato e si assume la seguente correlazione di scambio:

$$N_{u\,\mathrm{D}} = 0.4 \cdot R_{e\,\mathrm{D}}^{0.5} \cdot P_r^{0.33}$$

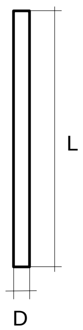
assumere inoltre: velocità dell'aria all'esterno 2 m/s, conducibilità 0.025 W/mK, calore specifico 1.004 kJ/kgK , viscosità dinamica 1.79·10^{-5} m^2/s.

Si richiede di valutare:

1) Il coeff. convettivo esterno.

2) L'applicabilità del modello di corpo sottile.

3) Il tempo necessario affinché il termometro (inteso come corpo sottile) si porti ad una temperatura che differisce di 0.5 °C da quella esterna.



$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot L = \frac{\pi \cdot 0.003^2}{4} \cdot 0.1 = 7.07 \cdot 10^{-7} \left[m^3\right]$$

$$S = \pi D \cdot L + 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 9.57 \cdot 10^{-4} \left[m^2\right]$$

$$L_{eq} = \frac{V}{S} = 7.4 \cdot 10^{-4} [m] \quad (\text{ circa } r/2 \text{ })$$

1)

$$R_{e_D} = \frac{w \cdot D}{\nu} = \frac{2 \cdot 0.003}{1.4 \cdot 10^{-5}} = 428.6$$

$$P_r = \frac{c_{p\ aria} \cdot \mu}{k_{aria}} = \frac{1004 \cdot 1.79 \cdot 10^{-5}}{0.025} = 0.72$$

$$N_{u_D} = 0.4 \cdot R_{e_D}^{0.5} P_r^{0.33} = 0.4 \cdot 428.6^{0.5} \cdot 0.72^{0.33} = 7.43$$

$$h = N_{u_D} \cdot \frac{k_{aria}}{D} = 7.43 \frac{0.025[W / mK]}{0.003[m^2]} = 62 \left[W / m^2 K\right]$$

2)

$$B_i = \frac{h \cdot L_{eq}}{k_{vetro}} = \frac{62 \cdot 7.4 \cdot 10^{-4}}{1.1} = 0.042 \quad < 0.1 \rightarrow \textbf{ok!}$$

3) Transitorio di corpo sottile

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hS}{\rho c V} t} \qquad \begin{aligned} T_0 &= 20\ °C \\ T_\infty &= 8\ \ °C \\ T^* &= 8 + 0.5 = 8.5\ °C \end{aligned}$$

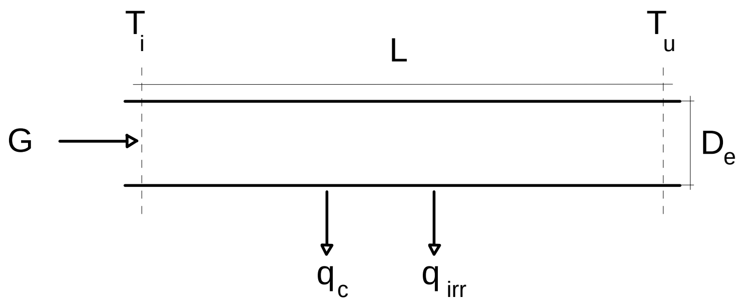
$$t^* = -\frac{\rho c V}{hS} \ln\left(\frac{T^* - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -\frac{2200 \cdot 750}{62} 7.4 \cdot 10^{-4} \ln\left(\frac{0.5}{12}\right) \approx 63[s]$$

***Esercizio* 2**

In un tubo sottile in rame, a sezione circolare (D_e = 0.005 mm) e lungo 1 m, scorre una portata G = 1.35 10^{-3} kg/s di acqua. Vengono misurate le temperature di massa all'ingresso e all'uscita del condotto ottenendo: T_i= 42.9 °C e T_u= 41.95 °C.

Tenendo presente che il tubo cede energia all'ambiente circostante sotto forma di calore attraverso i due meccanismi della convezione naturale e dell'irraggiamento (ε=0.85), determinare:

1) la potenza termica ceduta all'esterno per convezione naturale fra le sezioni di ingresso e di uscita.
2) il coefficiente di scambio convettivo medio tubo-aria h_C
3) Confrontare infine il risultato ottenuto con opportuna correlazione.



$q_{tot} = q_c + q_{irr}$

Consideriamo dapprima il bilancio energetico fra le sezioni di ingresso e di uscita del tubo, sarà (assumendo c= 4186 [J kg^{-1}K^{-1}]):

$$q_{tot} = G\ c\ (T_i - T_u) = 1.35 \cdot 10^{-3} \cdot 4186 \cdot (42.9 - 42.05) = 4.80 \quad [W]$$

La potenza ceduta sarà la somma di due contributi q_C , dovuto alla convezione, e q_{irr}, dovuto all'irraggiamento. Determiniamo q_{irr} mediante la seguente:

$$q_{irr} = A_e\ \sigma\ \mathcal{F}_{1-2}\ (T_s^4 - T_{amb}^4)$$

dove

A_e superficie di scambio: $A_e = \pi D_e L$ = 0.0157 m^2
σ costante di Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ [Wm^{-2}K^{-4}]
$\mathcal{F}_{1\text{-}2}$ = ε = 0.85 (piccola superficie in grande cavità)
$T_s = (T_i + T_u)/2$ =(42.9+42.05) /2 +273.15= 315.6 K
temperatura media superficie esterna del tubo
T_{amb} = 24.2 °C = 298.4 K temperatura ambiente

$$q_{irr} = 0.0157 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.85\,(315.6^4 - 298.4^4) = 1.51 \quad [W]$$

Per la quota di potenza termica ceduta per convezione sarà allora:

$$q_c = 4.80 - 1.51 = 3.29 \text{ [W]}$$

A questo punto, attraverso l'eq. di Newton, potremo ricavare il coefficiente di scambio convettivo come:

$$\bar{h}_c = \frac{q_c}{A_e(T_s - T_{amb})} = \frac{3.29}{0.0157(315.6 - 298.4)} = 12.2\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$$

Una correlazione appropriata per convezione naturale di aria all'esterno di un tubo orizzontale è data da:

$$\boxed{h_c = 1.32\left(\frac{T_s - T_\infty}{D_e}\right)^{1/4}} \qquad \text{[W/m}^2\text{K]}$$

che fornisce

$$h_c = 1.32\left(\frac{315.6 - 298.4}{0.005}\right)^{1/4} = 10.1 \text{ [W/m}^2\text{K]}$$

l'errore percentuale relativo alla correlazione vale

e%= 100·(12.2-10.1)/10.1 ≈ 21% accettabile !

***Esercizio* 3**
Una termocoppia, (diametro esterno .79 mm) è posta orizzontalmente in una cavità molto grande le cui pareti sono a 38 °C. La cavità contiene aria stagnante da considerarsi perfettamente trasparente. La f.e.m. della termocoppia indica una temperatura di 230 °C. Si determini la vera temperatura dell'aria se l'emittenza della termocoppia vale 0.8 (assumere termoc. in equilibrio termico con aria e pareti).

T_{pareti}= 38 + 273.15 = 311.2 T_{tc}=230 + 273.15 = 503.2
La termocoppia misura la temperatura di se stessa.
L'equilibrio termico impone che non vi sia flusso termico netto ceduto dalla termocoppia, ovvero:

$$q_{irr} + q_c = 0$$

Siccome q_{irr} è ceduto q_c dovrà essere acquistato, quindi $T_{aria} > T_{tc}$

$$A_e\ \sigma\ \varepsilon\ (T_{tc}^4 - T_{pareti}^4) - A_e h_c (T_{aria} - T_{tc}) = 0$$

dove h_c non è nota. utilizzeremo la correlazione

$$h_c = 1.32\left(\frac{T_{aria} - T_{tc}}{D_e}\right)^{1/4}$$

per cui:

$$\sigma\,\varepsilon\ (T_{tc}^4 - T_{pareti}^4) - \frac{1.32}{D_e^{1/4}}(T_{aria} - T_{tc})^{5/4} = 0$$

$$(T_{aria} - T_{tc}) = \left[\frac{\sigma\,\varepsilon\ D_e^{1/4}}{1.32}(T_{tc}^4 - T_{pareti}^4)\right]^{4/5}$$

$$(T_{aria} - T_{tc}) = \left[\frac{5.67\cdot 10^{-8}\ \cdot 0.8\cdot(0.79\cdot 10^{-3})^{1/4}}{1.32}(503.2^4 - 311.2^4)\right]^{4/5} = 99.8[K]$$

ovvero T_{aria}= 329.8 °C

***Esercizio* 4**

Dell'acqua ad 82 °C ed a 7.5 m/s scorre in un sottile tubo di rame, avente un diametro interno di 15 cm. Il condotto si trova in un locale a 16 °C e il coefficiente di scambio all'esterno vale h_e= 12 W/mK.

a) determinare il coefficiente di scambio termico sulla superficie interna.

b) valutare la lunghezza del tubo che dia luogo ad una caduta di temperatura dell'acqua pari ad 1 °C.

1) valutiamo il numero di Reynolds per stabilire il regime di moto, ci occorre la viscosità cinematica: la interpoliamo dalle tabelle:

$$\text{SBAGLIATO}\,\nu(82) = .443\cdot 10^{-6} + \frac{88-66}{93-66}(.316 - .443)\cdot 10^{-6} = 0.368\cdot 10^{-6}\ \left[m^2/s\right]$$

$$R_{e_D} = \frac{w\cdot D}{\nu} = \frac{7.5\cdot 0.15}{0.368\cdot 10^{-6}} = 3.06\cdot 10^6 > 10000 \quad \rightarrow \quad \text{turbolento}$$

utilizzeremo allora la seguente correlazione (conv. forz. all'interno di condotti, moto turbolento):

$$\boxed{N_u = 0.023\cdot R_{e\,\mathrm{D}}^{0.8}\cdot P_r^{0.33}}$$

Dalle tabelle si ottiene, interpolando, P_r= 2.23

$$N_u = 0.023\cdot(3.06\cdot 10^6)^{0.8}\cdot 2.23^{0.33} = 4626.4$$

Dalle tabelle si ottiene, interpolando, k_{H2O}= 0.67 [W/m K]

infine ricaviamo h_i come

$$h_i = \frac{k_{H_2O} \cdot N_u}{D} = \frac{0.67 \cdot 4626}{0.15} \approx 20660 \left[W / m^2 K \right]$$

Riguardo la caduta di temperatura lungo il tubo facciamo un bilancio del tipo:

$$G\, c\, (T_i - T_u) = Ah(T_s - T_\infty)$$

$$\pi \frac{D^2}{4} \rho c w (T_i - T_u) = \pi D L h_e (T_s - T_\infty)$$

$$L = \frac{\rho c w D (T_i - T_u)}{4 h_e (T_s - T_\infty)} = \frac{1000 \cdot 4186 \cdot 7.5 \cdot 0.15 \cdot 1}{4 \cdot 12 \cdot 66} \approx 1480\ [m]$$

***Esercizio* 5**

Due grandi piastre piane parallele, opache e grigie, a piccola distanza l'una dall'altra, si trovano rispettivamente alla temperatura T_1= 1000 K e T_2= 500 K ed hanno una emissività pari a ε_1= 0.6 e ε_2= 0.8. Calcolare il flusso termico radiativo netto scambiato tra le lastre.

$$q_{1-2} = A_1\, \sigma\, \mathcal{F}_{1-2}\, (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{F_{1-2}} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

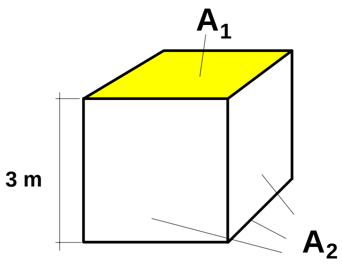
ma A_1=A_2, $F_{1\text{-}2}$=1

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{1/0.6 + 1/0.8 - 1} = 0.52$$

$$\varphi = \frac{q}{A_1} = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.52\, (1000^4 - 500^4) = 27640 \quad \left[W / m^2 \right]$$

***Esercizio* 6**

Una stanza cubica di 3 m x 3 m x 3 m è riscaldata mantenendo il soffitto alla temperatura T_1= 70 °C mentre le altre pareti laterali ed il pavimento si trovano alla temperatura di 10 °C. Assumendo che tutte le superfici abbiano una emissività ε=0.8 determinare il flusso termico radiativo scambiato dal soffitto.



T_1= 343.15 K
ε_1 = 0.8
A_1= 3·3 = 9 m^2

T_2= 283.15 K
ε_2 = 0.6
A_2= 5·9 = 45 m^2

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{F_{1-2}} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

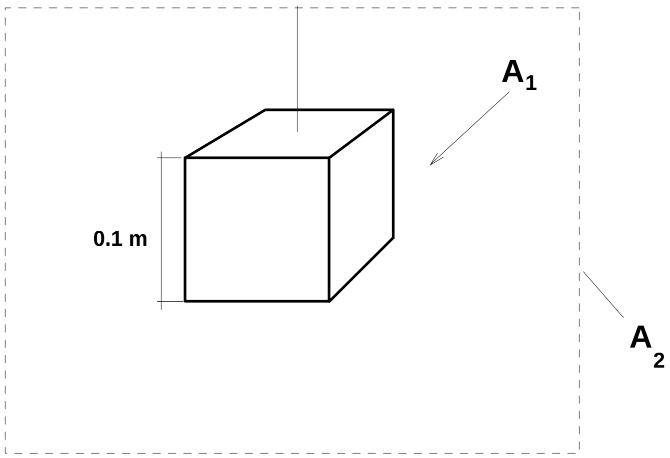
ma $F_{1\text{-}2}$= 1 e A_1/A_2= 1/5

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1}{0.8} + \dfrac{1}{5}\dfrac{(1-0.8)}{0.8}} = 0.77$$

$$q_{1-2} = A_1\,\sigma\,\mathcal{F}_{1-2}\,(T_1^4 - T_2^4)$$
$$q_{1-2} = 9\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\cdot 0.77\,(343.15^4 - 283.15^4) = 2922.5\,[W]$$

***Esercizio* 7**

Un blocco cubico (0.1 m x 0.1 m x 0.1 m) è sospeso, con una faccia orizzontale, in una stanza ove vi è aria stagnante a **10 °C**. Tutte le superfici del cubo (ε = 0.6) sono mantenute alla temperatura di 150 °C mentre le pareti della stanza si trovano alla temperatura di **20 °C** ed hanno emissività 0.8. Valutare il flusso termico scambiato complessivamente fra cubo e ambiente (convezione + irraggiamento)



Contributo radiativo

$$q_{1-2} = A_1\,\sigma\,\mathcal{F}_{1-2}\,(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{F_{1-2}} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

ma $F_{1\text{-}2}$= 1 e A_2>>A_1

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + 0} = \varepsilon_1 = 0.6$$

$$q_{1-2} = 6\cdot 0.1^2\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\cdot 0.6\,(423.15^4 - 293.15^4) = 50.4\,[W]$$

Contributo convettivo:

Temperatura del film per il calcolo delle proprietà termofisiche dell'aria:

T_f= (T_s+T_∞)/2 = (150 +10)/2 = 80 °C

Per tale temperatura si ricava:

$$\nu(80) = .168 \cdot 10^{-4} + \frac{80-38}{93-38}(.222 - .168) \cdot 10^{-4} = 0.209 \cdot 10^{-4} \left[m^2 / s\right]$$

$$P_r = 0.72$$

$$k = 0.03 \text{ [W/mK]}$$

$$\beta = 2.85 \cdot 10^{-3} \text{ [1/K]}$$

calcoliamo il numero di Grashof

$$G_r = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{2.85 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81 \cdot (150-10) \cdot 0.1^3}{(0.209 \cdot 10^{-4})^2} = 8.96 \cdot 10^6$$

laterali:

$$\overline{N}_u = \mathbf{0.56} \cdot (G_r P_r)^{1/4} = 0.56 \cdot (8.96 \cdot 10^6 \cdot 0.72)^{1/4} = 28.2$$

$$\overline{h} = \frac{k}{L} \overline{N}_u = \frac{0.03}{0.1} \cdot 28.2 = 8.46 \left[W / m^2 K\right]$$

alto

$$\overline{N}_u = \mathbf{0.54} \cdot (G_r P_r)^{1/4} = 0.54 \cdot (8.96 \cdot 10^6 \cdot 0.72)^{1/4} = 27.2$$

$$\overline{h} = \frac{k}{L} \overline{N}_u = \frac{0.03}{0.1} \cdot 27.2 = 8.16 \left[W / m^2 K\right]$$

basso

$$\overline{N}_u = \mathbf{0.27} \cdot (G_r P_r)^{1/4} = 0.56 \cdot (8.96 \cdot 10^6 \cdot 0.72)^{1/4} = 13.6$$

$$\overline{h} = \frac{k}{L} \overline{N}_u = \frac{0.03}{0.1} \cdot 13.6 = 4.08 \left[W / m^2 K\right]$$

quindi

$$q_c = 0.1^2 \cdot (4 \cdot 8.46 + 8.16 + 4.08)(150-10) = 64.5 \, [W]$$

$$q_{tot} = q_i + q_c = 50.4 + 64.5 = 114.9 \, [W]$$

Convezione forzata

Ancora richiami

La potenza termica (W) scambiata per convezione tra una superficie ed un fluido si esprime mediante la seguente:

$$q_c = \bar{h}_c \; A \; \Delta T \qquad (1)$$

- q_C [W] potenza termica
- A [m^2] area superficie di scambio
- $\Delta T = T_w - T_\infty$ [K] temperatura della superficie meno temperatura in punto specificato (solitamente lontano dalla parete)
- $\bar{h}_c$ [$Wm^{-2}K^{-1}$] valore medio del coefficiente di scambio termico convettivo.

Il coeff. locale h_{cx} è definito da $dq_c = h_{cx}\, dA\, (T_w - T_\infty)$ per cui:

$$\bar{h}_c = \frac{1}{A}\int_A h_{cx}\, dA$$

<u>Strato limite</u>

Indipendentemente dal tipo di moto le particelle vicine alla superficie sono rallentate da forze viscose e quelle adiacenti ad essa vi aderiscono. Un siffatto gradiente di velocità dà luogo ad uno sforzo di taglio pari a :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

con

τ- sforzo tangenziale [N/m^2]

u- velocità [m/s]

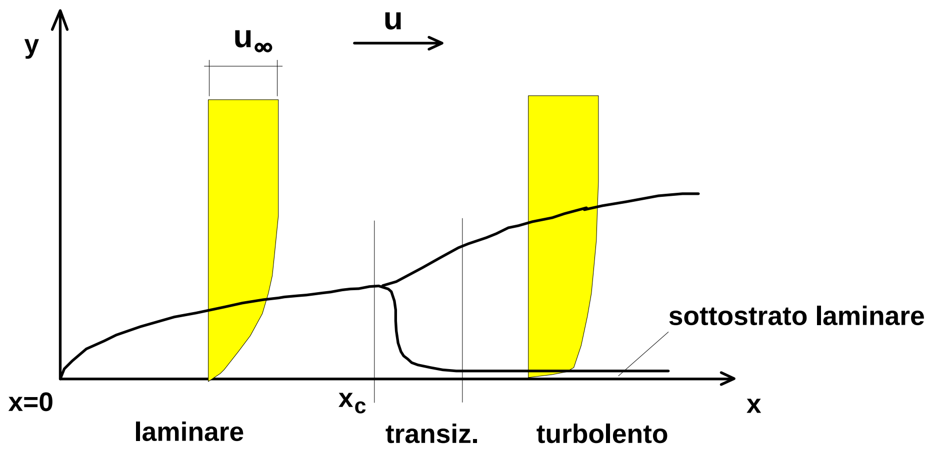
y distanza dalle parete [m]

μ- viscosità dinamica o assoluta[Pa·s ovvero Ns/m^2]

Lo spessore dello strato limite è definito come la distanza dalla superficie alla quale la velocità assume un valore pari al 99 % di quello della vel. indisturbata. Mediante l'introduzione di questo concetto risulta possibile porre in forma risolubile le eq. di Navier Stokes, calcolare le forze di attrito, etc.

Nel caso del flusso di un fluido su lastra piana parallela alla corrente, lo spessore dello strato limite ed i profili di velocità assumono la forma seguente:

<u>*Convezione su lastra piana*</u>



La distanza alla quale lo strato limite cessa di essere laminare è detta x critico, x_c, e viene espressa tramite il n° locale di Reynolds

$$R_{e\,c} = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} = \frac{u_\infty x_c}{\nu}$$

che è un indice del rapporto fra forze inerziali e forze viscose. Se queste ultime sono prevalenti (ovvero $R_e < R_{e\,c}$) si ha moto laminare, altrimenti turbolento.
Se il moto è laminare valgono le correlazioni a pagina 11.
Se il moto è turbolento, un'espressione in grado di correlare il coefficiente di attrito locale è:

$$C_{fx} = 0.0592 \cdot \mathrm{Re}_x^{-1/5} \qquad 5 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$$

dove

$$C_{fx} = \frac{\tau_{wx}}{\rho u_\infty^2 / 2}$$

mentre per lo spessore dello strato limite idrodinamico abbiamo:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot x}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

Confrontando δ_{turb} con δ_{lam} si nota che lo spessore dello strato limite turbolento cresce più rapidamente di quello laminare ed infatti tale spessore dipende da $x^{4/5}$ se il moto è turbolento e da $x^{1/2}$ nel caso laminare.
La riduzione con x del coefficiente di attrito è meno rapida, si ha:

$$C_{fx\,turb.} \propto x^{-1/5} \qquad \text{anzichè} \qquad C_{fx\,lam.} \propto x^{-1/2}$$

Nel regime turbolento lo sviluppo dello strato limite è influenzato fortemente dalle fluttuazioni casuali nel fluido e non dai processi di diffusione molecolare.
Una correlazione per lo scambio termico valida per il regime turbolento su lastra piana è:

$$N_{u\,x} = 0.0296 \cdot \mathrm{Re}_x^{4/5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad 0.6 < \mathrm{Pr} < 60$$

$$\overline{N}_{u\,L} = 0.037 \cdot \mathrm{Re}_L^{4/5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad ''$$

Se la transizione fra regime laminare e turbolento avviene verso la fine della lastra, ovvero:

$$0.95 < \frac{x_c}{L} < 1$$

allora le correlazioni valide per il regime laminare possono essere applicate a tutta la piastra con errore trascurabile. Tuttavia, se la transizione avviene in un punto ancora lontano dall'estremità della piastra ($x_c/L < .95$) il coefficiente di scambio termico medio sarà influenzato sia dal tratto in regime laminare che da quello turbolento. Si ha allora una situazione di strato limite *misto*.

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L}\left[\int_0^{x_c} h_{lam}\,dx + \int_{x_c}^{L} h_{turb}\,dx\right]$$
$$\text{con } h_{lam} \propto x^{-1/2}; h_{turb} \propto x^{-1/5}$$

dove si è ipotizzato che la transizione avvenga improvvisamente in corrispondenza di x_c . Integrando si ottiene l'espressione:

$$\bar{N}_{u\,L} = \left[0.664 \cdot \mathrm{Re}_{x_c}^{1/2} + 0.037 \cdot (\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_{x_c}^{4/5})\right] \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$

che può essere scritta come

$$\bar{N}_{u\,L} = \left[0.037 \cdot \mathrm{Re}_L^{4/5} - A\right] \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$

dove $A = 0.037\,\mathrm{Re}_{x_c}^{4/5} - 0.664 \cdot \mathrm{Re}_{x_c}^{1/2}$

Se come valore di Re_{xc} si assume quello tipico $\mathrm{Re}_{xc} = 5 \cdot 10^5$ si ottiene:

$$\bar{N}_{u\,L} = \left[0.037 \cdot \mathrm{Re}_L^{4/5} - 871\right] \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$

valida per $0.6 < \mathrm{Pr} < 60$
$5 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_L < 10^8$
$\mathrm{Re}_{xc} = 5 \cdot 10^5$

Risulta evidente che nelle situazioni in cui $L >> x_c$ ($\mathrm{Re}_L >> \mathrm{Re}_{xc}$) si ha:

$$A << 0.037\,\mathrm{Re}_L^{4/5}$$

e si riottiene la correlazione valida per regime turbolento

$$\bar{N}_{u\,L} = 0.037 \cdot \mathrm{Re}_L^{4/5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$

Convezione esterna su superfici affusolate

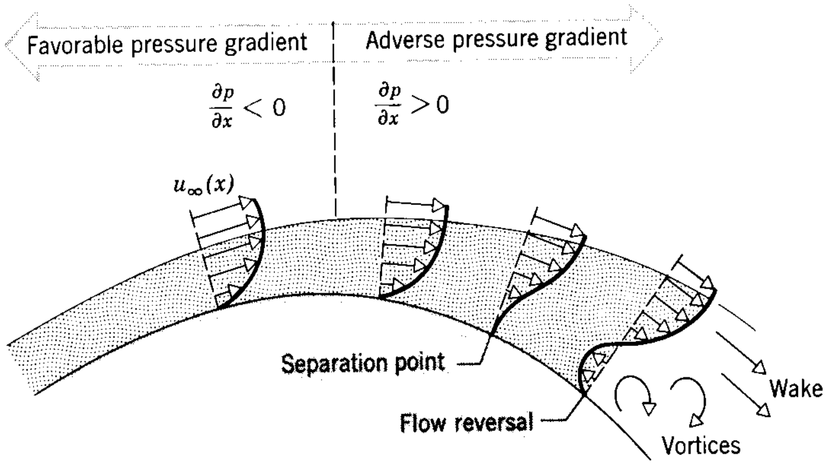


Figure — Velocity profile associated with separation on a circular cylinder in cross flow.

Nel primo tratto il fluido accelera ed il gradiente di pressione negativo è favorevole. Infatti dall'eq. di Bernoulli:

$$-\delta L_e = \delta L_{att} + vdp + udu + gdz$$

in assenza di lavoro esterno, trascurando le variazioni di quota si ha:

$$vdp = -(\delta L_{att} + udu)$$

Se il fluido accelera (du >0) la pressione diminuisce.
Nel secondo tratto il fluido decelera ed il gradiente di pressione diventa contrario al moto non appena udu diventa, in modulo, maggiore del termine δL_{att}. Quando il fluido decelera il gradiente di velocità , in direzione ortogonale alla parete

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

può diventare negativo. In questo punto si ha la cosiddetta separazione dello strato limite: vicino alla parete il fluido non ha sufficiente quantità di moto per vincere il gradiente di pressione avverso ed il moto in avanti, in tale punto, diventa impossibile.
Questa è la condizione per cui lo strato limite si "stacca" dalla parete e si forma un *wake* (scia) nella regione a valle. Il flusso nella regione adiacente alla superficie è caratterizzato dalla formazione di vortici ed è molto irregolare. Come detto la condizione per il *detachment* dello strato limite è

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

Alcune correlazioni sono date nell'esercizio 4.

Convezione forzata in condotti

Regime laminare $Re_D < 2100$; $Pr > 0.7$

Condotti lunghi (L/D>10) $$\overline{Nu}_D = 1.86 \cdot (\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot D/L)^{0.33} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

Condotti corti $100 < Re_D \cdot Pr \cdot D/L < 1500$; $Pr > 0.7$

$$\overline{Nu}_D = \frac{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot D}{4L} \ln\left[\frac{1}{1 - \frac{2.6}{\mathrm{Pr}^{0.167} (\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot D)^{0.5}}}\right]$$

Regime turbolento

Condotti lunghi (L/D>10) Dittus-Boelter $\overline{Nu}_f = 0.023 \cdot \mathrm{Re}_f^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}_f^n$

n= 0.4 for heating n=0.3 for cooling)

Colburn $\overline{Nu}_f = 0.023 \cdot \mathrm{Re}_f^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}_f^{1/3}$

Sieder-Tate

$$\overline{Nu}_m = 0.023 \cdot \mathrm{Re}_m^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}_m^{1/3} \cdot \left(\frac{\mu_m}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

Sleicher-Rouse $\overline{Nu}_m = 5 + 0.015 \cdot \mathrm{Re}_f^a \cdot \mathrm{Pr}_w^b$

$$a = 0.88 - 0.24/(4 + \mathrm{Pr}_w)$$

$$b = 1/3 + 0.5 \cdot e^{-0.6 \cdot \mathrm{Pr}_w}$$

con $10^4 < Re_f < 10^6$; $0.1 < Pr_w < 10^5$

Condotti corti $2 < \cdot D/L < 20$; $Pr > 0.7$

$$\overline{Nu}_f = 0.023 \cdot \left[1 + (D/L)^{0.7}\right] \cdot \mathrm{Re}^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}^{0.33}$$

Applicazioni

***Esercizio* 1**

Un fluido alla temperatura di 16 °C ed alla pressione di 1 bar scorre lungo una piastra larga 30 cm alla velocità di 3 m/s. Sapendo che la piastra si trova alla temperatura di 60 °C calcolare per x= 30 cm le seguenti grandezze:

a) spessore dello strato limite; b) coefficiente di attrito locale e medio; sforzo tangenziale locale dovuto all'attrito;

d) spessore dello strato limite termico; e) coefficiente di scambio termico locale e medio;

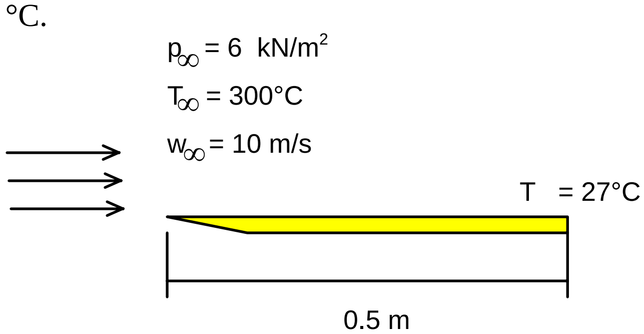
f) flusso termico scambiato per convezione.

Svolgere i calcoli per i seguenti tipi di fluido: aria, acqua e olio leggero

Prop. termofisiche (T_{film})	Aria	H_2O	Olio leggero
ρ [kg/m^3]	1.14	992	895
c_p [J/kg K]	1004	4180	1925.6
μ [N s/m^2]	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$68.1 \cdot 10^{-5}$	$2280 \cdot 10^{-5}$
λ [W/m K]	0.0267	0.629	0.128
v [m^2/s]	$0.168 \cdot 10^{-4}$	$0.686 \cdot 10^{-4}$	$25.4 \cdot 10^{-4}$
Pr	0.72	4.52	340

Correlazioni, calcoli e soluzioni sono a pag 11.

***Esercizio* 2**
Dell'aria alla pressione di 6 kN/m^2 ed alla temperatura di 300 °C scorre alla velocità di 10 m/s su di una lastra piana lunga 0.5 m. Valutare il flusso termico che occorre sottrarre alla piastra per unità di larghezza se si vuole mantenere la sua superficie alla temperatura di 27 °C.



Proprietà termofisiche dell'aria alla temperatura del film T_f= 437 K, p= 1 atm:
viscosità cinematica ν=30.84·10^{-6} m2/s, conduttività k=36.4·10^{-3} W/mK, Pr= 0.687.

<u>Nota:</u> le proprietà quali *k*, Pr ed μ possono essere assunte indipendenti dalla pressione con eccellente approssimazione. Tuttavia la viscosità cinematica v=μ/ρ varia con la pressione in proporzione inversa alle variazioni di densità. Applicando la legge di stato dei gas perfetti si ha che, a parità di temperatura *T*:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{p_2}{p_1}$$

essendo μ costante sarà anche:

$$\nu_2 \rho_2 = \nu_1 \rho_1 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \nu_1 \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

ed infine
$$v_2 = v_1 \frac{p_1}{p_2}$$

Pertanto la viscosità cinematica dell'aria a 437 K ed alla pressione di 6 kN/m^2 risulta

$$v_2 = v_1 \frac{p_1}{p_2} = 30.84 \cdot 10^{-6} \frac{1.013 \cdot 10^5 \left[N/m^2\right]}{6 \cdot 10^3 \left[N/m^2\right]} = 5.21 \cdot 10^{-4} \left[m^2/s\right]$$

Il flusso termico scambiato per unità di larghezza della piastra varrà:

$$q' = \bar{h} \cdot L \cdot 1 \cdot (T_w - T_\infty)$$

Vediamo il regime di moto

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{10[m/s] \cdot 0.5[m]}{5.21 \cdot 10^{-4}\left[m^2/s\right]} = 9597$$

Il moto è laminare lungo tutta la piastra e si può pertanto applicare la correlazione

$$\overline{N}_{uL} = 0.664 \cdot \mathrm{Re}_L^{1/2} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} = 0.664 \cdot 9597^{1/2} \cdot 0.687^{1/3} = 57.4$$

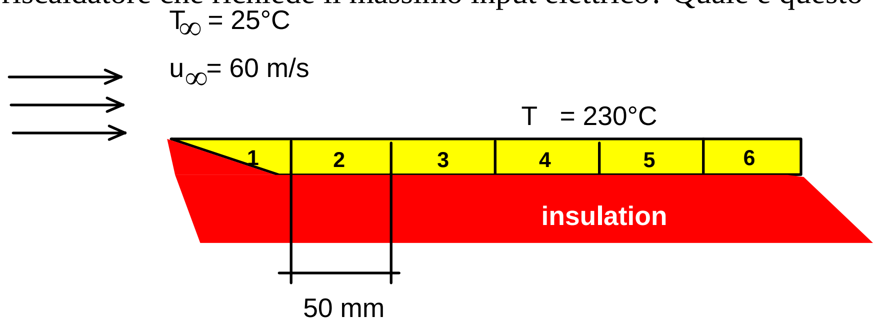
$$\bar{h} = \frac{\overline{N}_{uL} \cdot k}{L} = \frac{57.4 \cdot 0.0364[W/mK]}{0.5[m]} = 4.18\left[W/m^2K\right]$$

ed infine

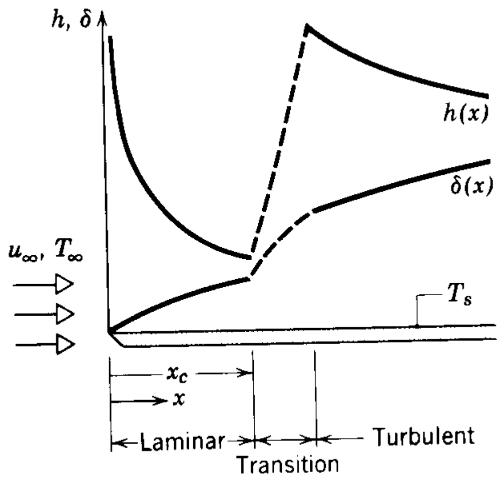
$$q' = 4.18 \cdot 0.5 \cdot (300 - 27) = 571\,[W/m]$$

***Esercizio* 3**

Una lastra piana di larghezza b=1 m è mantenuta alla temperatura uniforme di 230°C usando riscaldatori elettrici indipendenti ciascuno della lunghezza di 50 mm. Dell'aria atmosferica alla temperatura di 25 °C scorre lungo la parete alla velocità di 60 m/s. Quale è il riscaldatore che richiede il massimo input elettrico? Quale è questo valore?



Proprietà termofisiche dell'aria alla temperatura del film T_f= 400 K, p= 1 atm: viscosità cinematica ν=26.41·10^{-6} m^2/s, conduttività k=33.8·10^{-3} W/mK, Pr= 0.690.



L'individuazione del riscaldatore che dissipa la maggiore potenza richiede il calcolo del punto in cui si verifica la transizione da moto laminare a moto turbolento.

Nel primo tratto il moto è sicuramente laminare ottenendosi per Reynolds:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{u_\infty L_1}{\nu} = \frac{60 \cdot 0.05}{26.41 \cdot 10^{-6}} = 1.14 \cdot 10^5$$

Se si assume la transizione controllata da $Re_c=5\cdot10^5$ la transizione avverrà in corrispondenza del 5° elemento, più precisamente:

$$x_c = \frac{\nu \cdot Re_c}{u_\infty} = \frac{26.41 \cdot 10^{-6} \cdot (5 \cdot 10^5)}{60} = 0.22\ [m]$$

Il riscaldatore che richiede il massimo input è quello per il quale il coefficiente di scambio termico medio è più elevato.
Conoscendo come varia *h* con *x* si può concludere che vi sono le seguenti tre possibilità:
1. Il riscaldatore 1 poiché corrisponde al valore locale di *h* più elevato della convezione naturale.
2. Il riscaldatore 5 poiché corrisponde per un tratto al valore locale di *h* più elevato della convezione turbolenta.
3 Il riscaldatore 6 poiché le condizioni di regime turbolento esistono per tutta la superficie del riscaldatore e sebbene il valore di h sia inferiore a quello massimo dell'elemento precedente il valore medio potrebbe essere più alto.

In assenza di disperdimenti per ciascun riscaldatore sarà $P_{\text{elettrica}} = q_{\text{conv.}}$

Per il primo riscaldatore :

$$q_{c,1} = \overline{h}_1 (L_1 \cdot b)(T_w - T_\infty)$$

Il regime è laminare quindi

$$\overline{N}_{u\,L_1} = 0.664 \cdot Re_1^{1/2} \cdot Pr^{1/3} = 0.664 \cdot (1.14 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0.690^{1/3} = 198$$

$$\overline{h}_1 = \frac{\overline{N}_{uL_1} \cdot k}{L_1} = \frac{198 \cdot 0.0338[W/mK]}{0.05[m]} = 134\left[W/m^2K\right]$$

$$q_{c,1} = 134 \cdot (0.05 \cdot 1)(230 - 25) = 1370\ [W]$$

La potenza richiesta per il 5° riscaldatore può essere ottenuta sottraendo il flusso dissipato dai primi 4 riscaldatori a quello dissipato dai primi 5. Procediamo così in quanto abbiamo a disposizione correlazioni che danno *h* medio a partire dall'inizio della lastra.

$$q_{c,5} = \overline{h}_5 (L_5 \cdot b)(T_w - T_\infty) - \overline{h}_4 (L_4 \cdot b)(T_w - T_\infty)$$

$$q_{c,5} = \left[\overline{h}_5 L_5 - \overline{h}_4 L_4\right] \cdot (1)(T_w - T_\infty)$$

$$\overline{N}_{u\,4} = 0.664 \cdot Re_4^{1/2} \cdot Pr^{1/3} = 0.664 \cdot (4 \cdot 1.14 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0.690^{1/3} = 396$$

$$\overline{h}_4 = \frac{\overline{N}_{u4} \cdot k}{L_4} = \frac{396 \cdot 0.0338[W/mK]}{0.2[m]} = 67\left[W/m^2K\right]$$

$$\overline{N}_{u\,5} = \left[0.037 \cdot Re_5^{4/5} - 871\right] \cdot Pr^{1/3} = \left[0.037 \cdot (5 \cdot 1.14 \cdot 10^5)^{4/5} - 871\right] \cdot (0.69)^{1/3} = 546$$

$$\overline{h}_5 = \frac{\overline{N}_{u5} \cdot k}{L_5} = \frac{546 \cdot 0.0338[W/mK]}{0.25[m]} = 74\left[W/m^2K\right]$$

$$q_{c,5} = [74 \cdot 0.25 - 67 \cdot 0.20] \cdot (1)(230 - 25) = 1046\ [W]$$

In modo del tutto simile la potenza richiesta per il 6° riscaldatore si ottiene sottraendo dalla potenza richiesta da tutte 6 le resistenze il flusso termico dissipato dalle prime 5.

$$\overline{N}_{u\,6} = \left[0.037 \cdot \mathrm{Re}_6^{4/5} - 871\right] \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} = \left[0.037 \cdot (6 \cdot 1.14 \cdot 10^5)^{4/5} - 871\right] \cdot (0.69)^{1/3} = 753$$

$$\overline{h}_6 = \frac{\overline{N}_{u6} \cdot k}{L_6} = \frac{753 \cdot 0.0338[W/mK]}{0.3[m]} = 85\left[W/m^2K\right]$$

$$q_{c,6} = [85 \cdot 0.3 - 74 \cdot 0.25] \cdot (1)(230 - 25) = 1435\,[W]$$

Risulta quindi $q_6 > q_1 > q_5$ e la resistenza 6 dissipa la maggiore potenza.

***Esercizio* 4**

Un filo di platino lucidato, avente un diametro di 0.13 mm e lungo 6.3 mm, viene utilizzato in un anemometro a filo caldo per misurare la velocità di aria a 20 °C in un intervallo compreso tra 1.2 e 6 m/s. Il filo è montato nel circuito a ponte di Wheatstone di Fig. (a) e viene mantenuto alla temperatura di 230 °C regolando la corrente col reostato. Per progettare il circuito elettrico occorre conoscere la corrente necessaria, in funzione della velocità dell'aria. La resistività del platino a 230 °C è $1.7 \cdot 10^{-7}$ Ω·m.

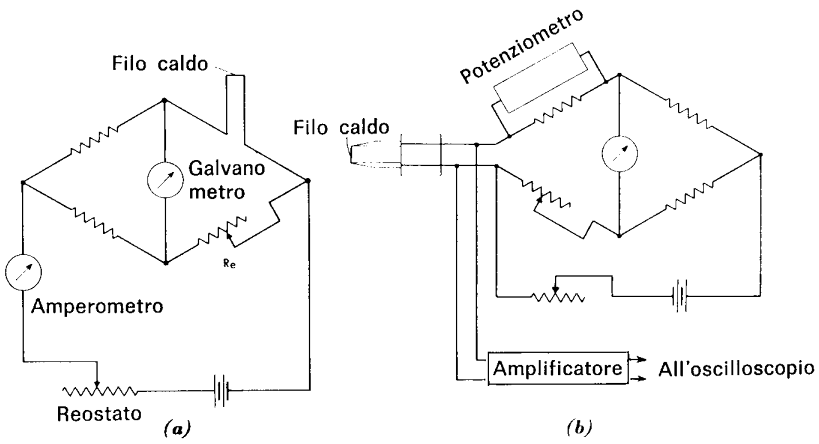


Fig. – Schemi dei circuiti per misure con filo caldo.

Siccome il filo è molto sottile si può trascurare il gradiente radiale di temperatura.

Alla temperatura media del film di 125 °C l'aria ha una conducibilità k= 0.0325 [W/mK] ed una viscosità cinematica pari a v= $0.25 \cdot 10^{-4}$ [m²/s]. Alla velocità di 1.2 m/s il n° di Reynolds vale.

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty D}{v} = \frac{1.2 \cdot 0.13 \cdot 10^{-3}}{2.5 \cdot 10^{-5}} = 6.2$$

mentre per u=6 [m/s] avremo Re= 31.2

In tale intervallo di valori (compresi fra 4 e 40) possiamo usare una delle seguenti correlazioni (ne esistono molte altre):

$$\overline{N}_u = C \cdot \mathrm{Re}^n \qquad (\text{ valida per l'aria })$$

$$\overline{N}_u = 1.1 \cdot C \cdot \mathrm{Re}^n \cdot \mathrm{Pr}^{0.31}$$

dove C ed n dipendono dal numero di Re secondo la seguente tabella

Re_D	***C***	***n***
0.4-4	0.891	0.330
4-40	0.821	0.385
40-4k	0.615	0.466
4k-40k	0.174	0.618
40k-400k	0.0239	0.805

Utilizzeremo la più semplice

$$\overline{h}_c = \frac{k}{D} C \,\mathrm{Re}^n = \frac{0.0325}{0.13 \cdot 10^{-3}} 0.821 \cdot u_\infty^{0.385} \cdot \left[\frac{0.13 \cdot 10^{-3}}{2.5 \cdot 10^{-5}}\right]^{0.385} = 387 \cdot u_\infty^{0.385} \left[W / m^2 K\right]$$

Valutiamo ora la conduttanza per unità di superficie dovuta all'irraggiamento

$$\overline{h}_i = \frac{q_i}{A(T_w - T_\infty)} = \frac{\sigma\varepsilon(T_w^4 - T_\infty^4)}{(T_w - T_\infty)}$$

L'emissività del platino lucidato è circa 0.07 per cui si ricava un valore di h_i pari a circa 1.1 [W/m^2 K] e quindi il calore scambiato per irraggiamento è trascurabile rispetto a quello scambiato per convezione forzata.

La potenza termica ceduta dal filo vale dunque:

$$q = \overline{h}_c A(T_w - T_\infty) = 387 \cdot w_\infty^{0.385} \cdot \pi(0.13 \cdot 10^{-3})(6.3 \cdot 10^{-3})(210)$$

$$q = 0.21 \cdot w_\infty^{0.385}$$

Siccome dovrà essere

$$q = P_{\text{elettrica}} = i^2 R$$

avremo

$$R = \rho_{el} \frac{L}{A} = 1.7 \cdot 10^{-7} \frac{6.3 \cdot 10^{-3}}{\pi(0.13 \cdot 10^{-3})^2 \,/\, 4} = 0.081 \,[\Omega]$$

$$i = \sqrt{\frac{q}{R}} = \sqrt{\frac{0.21 \cdot u_\infty^{0.385}}{0.081}} = 1.6 \cdot u_\infty^{0.385/2} [A]$$

da cui la corrente può essere facilmente calcolata in corrispondenza di ciascuna velocità.

Risultati esercizio 1			
	Aria	Acqua	Olio leggero
$\mathrm{Re}_x = \dfrac{u_\infty \rho x}{\mu}$	$\dfrac{3 \cdot 1.14 \cdot 0.3}{1.91 \cdot 10^{-5}} = 53700$	$\dfrac{3 \cdot 992 \cdot 0.3}{68.1 \cdot 10^{-5}} = 1.31 \cdot 10^{6}$	$\dfrac{3 \cdot 895 \cdot 0.3}{2280 \cdot 10^{-5}} = 35300$
assumendo Re_c=5·10^5 $x_c = \dfrac{5 \cdot 10^5 \mu}{u_\infty \rho}$	$\dfrac{5 \cdot 10^5 \cdot 1.91 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 1.14} = 2.79[m]$	$\dfrac{5 \cdot 10^5 \cdot 68.1 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 992} = 0.114[m]$	$\dfrac{5 \cdot 10^5 \cdot 2280 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 895} = 4.4[m]$
$\delta = \dfrac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\dfrac{5 \cdot 0.3}{\sqrt{53700}} = 6.47 \cdot 10^{-3}$	$\dfrac{5 \cdot 0.3}{\sqrt{1.31 \cdot 10^6}} = 1.31 \cdot 10^{-3}$	$\dfrac{5 \cdot 0.3}{\sqrt{35300}} = 8 \cdot 10^{-3}$
$C_{fx} = \dfrac{\tau_w}{\rho u_\infty^2 / 2} = \dfrac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\dfrac{0.664}{\sqrt{53700}} = 2.86 \cdot 10^{-3}$	$\dfrac{0.664}{\sqrt{1.31 \cdot 10^6}} = 5.8 \cdot 10^{-4}$	$\dfrac{0.664}{\sqrt{35300}} = 3.53 \cdot 10^{-3}$
$\overline{C}_f = \dfrac{1}{L}\int_0^L C_{fx} dx = \dfrac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	$\dfrac{1.33}{\sqrt{53700}} = 5.74 \cdot 10^{-3}$	$\dfrac{1.33}{\sqrt{1.31 \cdot 10^6}} = 1.16 \cdot 10^{-4}$	$\dfrac{1.33}{\sqrt{35300}} = 7.07 \cdot 10^{-3}$
$\tau_s = \mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{y=0} = 0.332 \mu \dfrac{u_\infty}{x} \sqrt{\mathrm{Re}_x}$	$\tau_s = 1.47 \cdot 10^{-2}$ [N/m^2]	$\tau_s = 2.59$ [N/m^2]	$\tau_s = 14.22$ [N/m^2]
$\delta_t = \dfrac{\delta}{\mathrm{Pr}^{1/3}}$	$\delta_t = \dfrac{6.47 \cdot 10^{-3}}{0.72^{1/3}} = 7.22 \cdot 10^{-3}$ $[m]$	$\delta_t = \dfrac{1.31 \cdot 10^{-3}}{4.52^{1/3}} = 7.92 \cdot 10^{-4}$ $[m]$	$\delta_t = \dfrac{8 \cdot 10^{-3}}{340^{1/3}} = 1.14 \cdot 10^{-3}$ $[m]$
$h_{c\,x} = \dfrac{\lambda}{L} 0.332\, \mathrm{Re}_x^{1/2}\, \mathrm{Pr}^{1/3}$	h_{cx} = 6.14 [W/m^2 K]	h_{cx} = 1317 [W/m^2 K]	h_{cx} = 186 [W/m^2 K]
$\overline{h}_c = 2 \cdot h_{cL}$	$\overline{h}_c$ = 12.28 [W/m^2 K]	$\overline{h}_c$ = 2634 [W/m^2 K]	$\overline{h}_c$ = 372 [W/m^2 K]
$q = \overline{h}_c \cdot A \cdot (T_w - T_\infty)$	q= 48.6 [W]	q= 10430 [W]	q= 1473 [W]

Nota:
Per l'acqua si vede che $x_{\mathrm{critico}} < L$ per cui il regime di moto sarebbe turbolento a partire da x=.11 m.
In questo confronto, comunque, il regime è stato considerato laminare.

Convezione naturale

Ancora richiami

Come per la convezione forzata, anche per quella naturale possono nascere instabilità idrodinamiche, ovvero eventuali disturbi possono essere amplificati trasformando il regime di moto da laminare a turbolento. In convezione naturale, la transizione nello strato limite dipende dall'entità relativa delle forze di galleggiamento e viscose presenti nel fluido. E' consuetudine correlare questo rapporto mediante il numero di Rayleigh, *Ra*, che è semplicemente il prodotto $Gr \cdot Pr$. Per pareti verticali il numero di Rayleigh critico vale:

$$Ra_c = Gr_c \cdot \Pr = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) x_c^3}{\nu a} \approx 10^9$$

Come nella convezione forzata, la transizione alla turbolenza ha un effetto notevole sullo scambio termico.

<u>*Correlazioni empiriche per la convezione naturale*</u>: **CONVEZIONE ESTERNA**

Queste correlazioni hanno in genere la forma del tipo:

$$\overline{N}_{u\,L} = \frac{\overline{h} L}{k} = C \cdot Ra_L^n$$

dove il numero di Rayleigh è definito:

$$R_{a\,L} = Gr_L \cdot \Pr = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) L^3}{\nu a}$$

Tipicamente n=1/4 per regime laminare e n=1/3 per il turbolento. Per il moto turbolento risulta pertanto h_L indipendente da L.

Tutte le proprietà termofisiche sono valutate alla temperatura media del film

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

<u>Lastra piana verticale</u>

Per superfici piane e cilindriche verticali (di diametro non troppo piccolo) isoterme (temperatura uniforme di parete):

$$Nu_x = \frac{h_{c\,x} \cdot x}{k} = 0.41 \cdot (Gr_x \cdot \Pr)^{1/4} \qquad \overline{N}u_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = 0.555 \cdot (Gr_L \cdot \Pr)^{1/4}$$

valida per regime **laminare** ($10 < Gr_L\, Pr < 10^9$) mentre per regime **turbolento**:

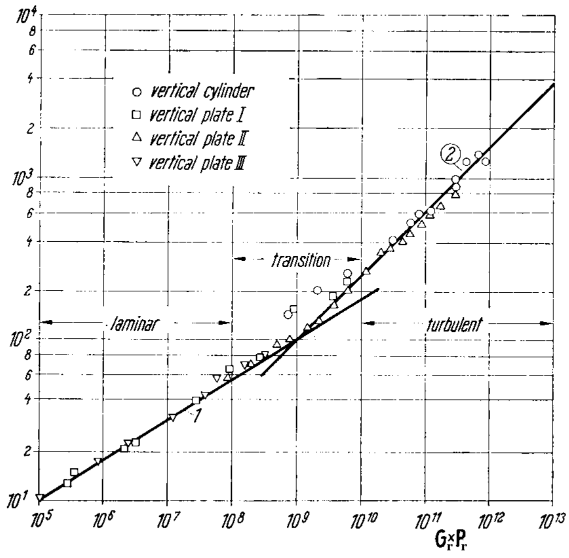
$$\overline{N}u_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = 0.13 \cdot (Gr_L \cdot \Pr)^{1/3} \quad \text{oppure} \quad \overline{N}u_L = 0.021 \cdot (Gr_L \cdot \Pr)^{2/5}$$

vedi figura a pagina seguente.

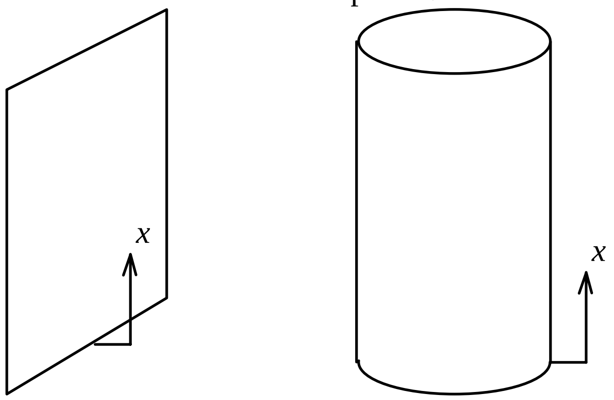
Fig. — Average Nusselt number for free convection on vertical plates and cylinders, after E. R. G. Eckert and T. W. Jackson [18]

Curve (1) laminar:
$N_m = 0{\cdot}555\,(GP)^{1/4}; \quad GP < 10^9$

Curve (2) turbulent:
$N_m = 0{\cdot}0210\,(GP)^{2/5}; \quad GP > 10^9$



Nel caso in cui ci sia una condizione al contorno termica del tipo: flusso termico imposto, valgono ancora le equazioni precedenti se si usa come temperatura di parete significativa la T_w valutata a metà altezza della parete.



<u>Superfici orizzontali</u>

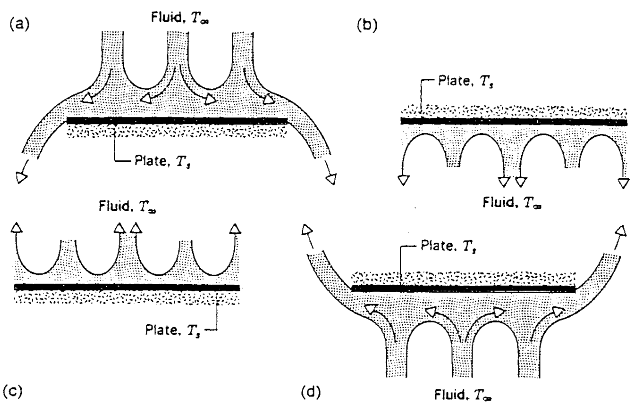


Figure — Buoyancy driven flows on horizontal cold ($T_s < T_\infty$) and hot ($T_s > T_\infty$) plates: (*a*) top surface of cold plate, (*b*) bottom surface of cold plate, (*c*) top surface of hot plate, and (*d*) bottom surface of hot plate.

$T_w > T_\infty$ verso l'alto o $T_w < T_\infty$ verso il basso (casi b e c)

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = 0.15 \cdot (Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^{1/3}$$

per $2 \cdot 10^7 < Gr_L\, Pr < 3 \cdot 10^9$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = 0.54 \cdot (Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^{1/4}$$

per $10^5 < Gr_L\, Pr < 2 \cdot 10^7$

$T_w > T_\infty$ verso il basso o $T_w < T_\infty$ verso l'alto (casi a e d)

$$\overline{Nu}_L = 0.27 \cdot (Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^{1/4} \qquad \text{per} \quad 10^5 < Gr_L\, Pr < 10^{10}$$

Se le piastre sono rettangolari si assume $L=A/p$ (p=perimetro) a meno che i lati non siano eccessivamente diversi. Se è un disco $L= 0.9\, D$.

<u>Lastra piana verticale (correlazioni più accurate)</u>

Recentemente Churcill e Chu hanno proposto una correlazione che è valida in tutto il campo di Ra_L:

$$\overline{N}_{uL} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 \cdot Ra_L^{1/6}}{\left[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$$

Se il regime è laminare ($0 < Ra \cdot L < 10^9$) una migliore approssimazione può essere ottenuta usando la seguente correlazione:

$$\overline{N}_{uL} = 0.68 + \frac{0.670 \cdot Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0.492 / \mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}$$

E' importante notare che i precedenti risultati sono stati ottenuti per pareti isoterme (T_w = costante). Se vi è una condizione di flusso termico imposto la differenza di temperatura varia con x e ($T_w - T_\infty$) = f(x) aumentando con x a partire dal valore 0 in x=0. Si è notato che le correlazioni ottenute con T_w= cost. possono estendersi con ottima approssimazione anche al caso di flusso termico imposto costante q'' se come differenza di temperatura significativa si assume quella a metà della piastra $\Delta T_{L/2} = T_{W L/2} - T$, quindi si definisce

$$\overline{h} = \frac{q''}{\Delta T_{L/2}}$$

e si utilizza una correlazione valida per T_w = cost.. Ovviamente questo processo va iterato per determinare, per tentativi $\Delta T_{L/2}$. In pratica:

$$\Delta T_{L/2\ \mathrm{i+1}} = \frac{q''\,(\text{imposto})}{\overline{h}(\Delta T_{L/2\ \mathrm{i}})}$$

h infatti è fortemente influenzato da $\Delta T_{L/2}$ attraverso il numero di Ra ed anche un po' dalla variazione delle proprietà termofisiche alla temperatura del film.
Alla 1ª iterazione si impone un valore di tentativo per h.

Vediamo di ricavare l'andamento della temperatura con un esempio: assumendo che $N_{ux} \propto Ra_x^{1/4}$ su tutta la parete, ne segue che

$$N_{ux} = \frac{q''x}{k\Delta T} \propto \Delta T^{1/4} \cdot x^{3/4}$$

quindi

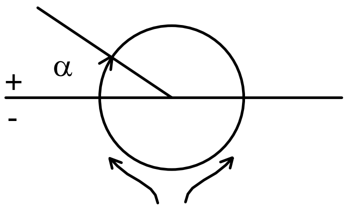
$$\Delta T^{1+1/4} \propto x^{1-3/4} \quad \Rightarrow \quad \Delta T^{5/4} \propto x^{1/4} \quad \Rightarrow \quad \Delta T \propto x^{1/5}$$

$$\frac{\Delta T_x}{x^{1/5}} = \frac{\Delta T_{L/2}}{(L/2)^{1/5}} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_x = 1.15 \cdot (x/L)^{1/5} \cdot \Delta T_{L/2}$$

Le correlazioni per lastre verticali possono essere estese al caso di cilindri verticali di altezza L se lo spessore dello strato limite δ è molto minore del diametro del cilindro D. Questa condizione è soddisfatta se :

$$\frac{D}{L} \geq \frac{3.5}{Gr_L^{1/4}}$$

Cilindri orizzontali



Nel caso di cilindro orizzontale in aria

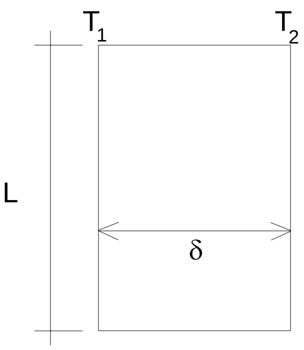
$$Nu_\alpha = 0.604 \cdot Gr_D^{1/4} \cdot \varphi(\alpha)$$

α	-90	-60	-30	**0**	30	60	75	90
$\varphi(\alpha)$		0.75	0.72	**0.66**	0.58	0.46	0.36	0

Un'equazione valida per un coefficiente medio di scambio termico per fili e tubi orizzontali in convezione naturale è quella di Mc Adams:

$$\overline{N}_{u\,D} = 0.53 \cdot (Gr_D \cdot \mathrm{Pr})^{1/4} \quad \text{valida per} \quad \mathrm{Pr} > 0.5; \quad 10^3 < Gr_D < 10^9$$

Convezione naturale in spazi chiusi (aria)



Caso dell'intercapedine verticale:

$$\overline{N}_{u\delta} = \frac{h\delta}{k} = 0.18 \cdot Gr_\delta^{1/4} \left[\frac{L}{\delta}\right]^{-1/9} \qquad 2 \cdot 10^3 < Gr_\delta < 2 \cdot 10^4$$

$$\overline{N}_{u\delta} = 0.065 \cdot Gr_\delta^{1/3} \left[\frac{L}{\delta}\right]^{-1/9} \qquad 2 \cdot 10^4 < Gr_\delta < 11 \cdot 10^6$$

$$Gr_\delta = \frac{\beta g \delta^3 \rho^2 (T_1 - T_2)}{\mu^2}$$

Se Gr_δ <2000 lo scambio termico è essenzialmente conduttivo cosicché in questo caso Nu_δ =1

Per intercapedini orizzontali :

Nel caso di aria

$$\overline{N}_{u\,\delta} = 0.195 \cdot Gr_{\delta}^{1/4} \qquad 10^4 < Gr_D < 4 \cdot 10^5$$

$$\overline{N}_{u\,\delta} = 0.068 \cdot Gr_{\delta}^{1/3} \qquad Gr_D > 4 \cdot 10^5$$

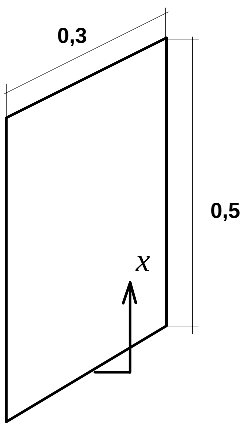
nel caso di liquidi

$$\overline{N}_{u\,\delta} = 0.069 \cdot Gr_{\delta}^{1/4} \qquad 3 \cdot 10^5 < Gr_D \cdot \Pr < 7 \cdot 10^9$$

Applicazioni

***Esercizio* 1**

Valutare il flusso termico scambiato in convezione naturale da una piastra verticale di dimensioni 0.3×0.5 [m] immersa nei seguenti fluidi: aria, acqua, olio. La temperatura del fluido sia T_∞ = 20 [°C] mentre la temperatura della piastra è uniforme e vale 56 [°C].



Le proprietà fisiche vanno calcolate alla temperatura media del film ovvero a:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{56 + 20}{2} = 38[°C]$$

Se $Gr_L \cdot Pr < 10^9$ useremo $\quad \overline{h} = 0.555 \cdot \frac{k}{L} \cdot (Gr_L \cdot \Pr)^{1/4}$

altrimenti $\quad \overline{h} = 0.13 \cdot \frac{k}{L} \cdot (Gr_L \cdot \Pr)^{1/3}$

Prop. termofisiche (T_{film})	Aria	H_2O	Olio leggero
ρ [kg/m^3]	1.13	992	895
c_p [J/kg K]	1005	4178	1926
μ [N s/m^2]	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$68.1 \cdot 10^{-5}$	$2280 \cdot 10^{-5}$
k [W/m K]	0.0267	0.629	0.128
v [m^2/s]	$0.168 \cdot 10^{-4}$	$0.686 \cdot 10^{-4}$	$25.4 \cdot 10^{-4}$
a	$2.389 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-7}$	$7.61 \cdot 10^{-8}$
β	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$0.360 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$
Pr	0.72	4.52	340
$\beta g \rho^2/\mu^2$	$11.2 \cdot 10^7$	$75 \cdot 10^8$	$106 \cdot 10^5$

Per l'aria

$$R_{a\,L} = Gr_L \cdot \Pr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)L^3}{v^2}\Pr = 11.2\cdot 10^7\cdot(0.5)^3\cdot 36\cdot 0.72 = 3.6\cdot 10^8 < 10^9$$

regime laminare

$$\bar{h} = 0.555\cdot\frac{k}{L}\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/4} = 0.555\frac{0.0267}{0.5}\left(3.6\cdot 10^8\right)^{1/4} = 4.1\left[W/m^2K\right]$$

$$q = \bar{h}\cdot A\cdot(T_w - T_\infty) = 4.1\cdot(0.3\cdot 0.5)\cdot 36 \approx 22[W]$$

Per l'acqua

$$R_{a\,L} = Gr_L \cdot \Pr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)L^3}{v^2}\Pr = 75\cdot 10^8\cdot(0.5)^3\cdot 36\cdot 4.52 = 1.52\cdot 10^{11} > 10^9$$

regime turbolento

$$\bar{h} = 0.013\cdot\frac{k}{L}\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/3} = 0.13\frac{0.629}{0.5}\left(1.52\cdot 10^{11}\right)^{1/3} = 872.8\left[W/m^2K\right]$$

$$q = \bar{h}\cdot A\cdot(T_w - T_\infty) = 872.8\cdot(0.3\cdot 0.5)\cdot 36 \approx 4700[W]$$

Per l'olio

$$R_{aL} = Gr_L \cdot \Pr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)L^3}{v^2}\Pr = 106\cdot 10^5\cdot(0.5)^3\cdot 36\cdot 340 = 1.62\cdot 10^{10} > 10^9$$

regime turbolento

$$\bar{h} = 0.013\cdot\frac{k}{L}\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/3} = 0.13\frac{0.128}{0.5}\left(1.62\cdot 10^{10}\right)^{1/3} = 84.2\left[W/m^2K\right]$$

$$q = \bar{h}\cdot A\cdot(T_w - T_\infty) = 84.2\cdot(0.3\cdot 0.5)\cdot 36 \approx 455[W]$$

***Esercizio* 2**

Una piastra quadrata di lato L= 0.3 [m] è immersa orizzontalmente in aria stagnante. Calcolare il flusso termico scambiato per convezione naturale con l'aria a T_∞ = 20 [°C] mentre la temperatura della piastra è uniforme e vale 56 [°C].

$$R_{a\,L} = Gr_L \cdot \Pr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)L^3}{v^2}\Pr = 11.2\cdot 10^7\cdot(0.3)^3\cdot 36\cdot 0.72 = 7.84\cdot 10^7$$

lato superiore:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}\cdot L}{k} = 0.15\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/3}$$

$$\bar{h} = 0.15\cdot\frac{k}{L}\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/3} = 0.15\frac{0.0267}{0.3}\left(7.84\cdot 10^7\right)^{1/3} = 5.71\left[W/m^2K\right]$$

$$q = \bar{h}\cdot A\cdot(T_w - T_\infty) = 5.71\cdot(0.3\cdot 0.3)\cdot 36 \approx 18.5[W]$$

lato inferiore

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}\cdot L}{k} = 0.27\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/4}$$

$$\bar{h} = 0.27\cdot\frac{k}{L}\cdot(Gr_L\cdot\Pr)^{1/4} = 0.27\frac{0.0267}{0.3}\left(7.84\cdot 10^7\right)^{1/4} = 2.26\left[W/m^2K\right]$$

$$q = \bar{h}\cdot A\cdot(T_w - T_\infty) = 2.26\cdot(0.3\cdot 0.3)\cdot 36 \approx 7.3[W]$$

***Esercizio* 3**

Valutare il flusso termico smaltito dalla superficie esterna di un tubo del diametro di 1 [cm] e lunghezza unitaria immerso orizzontalmente in H_2O. la temperatura superficiale del tubo è a 56 [°C] mentre la temperatura dell'acqua vale $T_\infty = 20$ [°C].

Per cilindri orizzontali abbiamo:

$$\overline{N}_{u\,D} = 0.53 \cdot (Gr_D \cdot \Pr)^{1/4} \quad \text{valida per} \quad \Pr > 0.5; \quad 10^3 < Gr_D < 10^9$$

Nel caso in questione Pr = 4.52 mentre

$$Gr_D = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) D^3}{\nu^2} = 75 \cdot 10^8 \cdot (0.01)^3 \cdot 36 = 2.7 \cdot 10^5$$

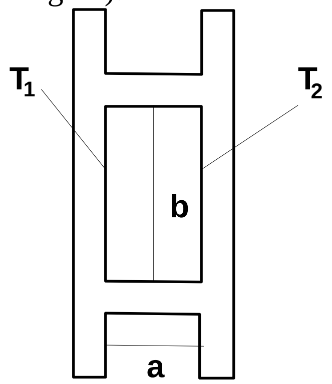
le condizioni sono quindi verificate, otterremo:

$$\overline{h} = 0.53 \frac{0.629}{0.01} \cdot (2.7 \cdot 10^5 \cdot 4.52)^{1/4} = 1108 \left[W / m^2 K \right]$$

$$q = \overline{h} \cdot p \cdot 1 \cdot (T_w - T_\infty) = 1108 \cdot (\pi \cdot 0.01) \cdot 36 \approx 41250 [W]$$

***Esercizio* 4**

Calcolare il flusso termico scambiato per convezione naturale nell'intercapedine di un mattone forato di cemento (vedi figura).



a= 0.03 [m] , b= 0.3 [m]

con T_1= 10 °C, T_2 = -10 °C (T_m=0 °C)

Le grandezze di interesse vanno calcolate alla temperatura media.

Intercapedine verticale:

$$\overline{N}_{u\delta} = \frac{h\delta}{k} = 0.18 \cdot Gr_\delta^{1/4} \left[\frac{L}{\delta} \right]^{-1/9} \qquad 2 \cdot 10^3 < Gr_\delta < 2 \cdot 10^4$$

$$\overline{N}_{u\delta} = 0.065 \cdot Gr_\delta^{1/3} \left[\frac{L}{\delta} \right]^{-1/9} \qquad 2 \cdot 10^4 < Gr_\delta < 11 \cdot 10^6$$

$$Gr_\delta = \frac{\beta g \delta^3 \rho^2 (T_1 - T_2)}{\mu^2}$$

Calcoliamo Gr_δ:

$$Gr_\delta = \frac{\beta g \delta^3 \rho^2 (T_1 - T_2)}{\mu^2} = 20 \cdot 10^7 \cdot (20) \cdot (0.03)^3 = 1.08 \cdot 10^5$$

$$\overline{N}_{u\delta} = 0.065 \cdot (1.08 \cdot 10^5)^{1/3} \left[\frac{0.3}{0.03} \right]^{-1/9} = 2.4$$

$$\overline{h} = Nu_\delta \frac{k}{\delta} = 2.4 \cdot \frac{0.0242}{0.03} = 1.94 \left[W / m^2 K \right]$$

$$q / A = \overline{h} \cdot (T_w - T_\infty) = 1.94 \cdot 20 \approx 39 \left[W / m^2 \right]$$

Esercizio 5

Valutare il flusso termico disperso da un tubo coibentato di lunghezza unitaria.
Si hanno a disposizione i seguenti dati:

Raggio interno del tubo	r_i=1 cm
Spessore tubo	0.5 cm
Spessore coibentazione	3 cm
Conduttività termica tubo	k_{tubo}=15 W/m°C
Conduttività termica isolante	k_{isol}=0.04 W/m°C
Temperatura fluido interno	T_i= 90 °C
Temperatura fluido esterno	T_e=25 °C
Coefficiente scambio convettivo interno	h_i=1800 W/m^2 °C
Coefficiente scambio convettivo esterno	h_e=8 W/m^2 °C

Calcolare inoltre per quale spessore della coibentazione si ha flusso disperso <u>massimo</u>. Il flusso termico disperso è dato da

$$q = \frac{\Delta T}{R_{tot}}$$

per la geometria cilindrica la resistenza termica serie è data da

$$R_{tot} = \sum R_i = \frac{1}{2\pi r_i h_i L} + \frac{\ln(r_m / r_i)}{2\pi k_{tubo} L} + \frac{\ln(r_e / r_m)}{2\pi k_{isol} L} + \frac{1}{2\pi r_e h_e L}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 1800} + \frac{\ln(1.5/1)}{2\pi \cdot 15} + \frac{\ln(4.5/1.5)}{2\pi \cdot 0.04} + \frac{1}{2\pi \cdot 4.5 \cdot 10^{-2} \cdot 8}$$

$$= 8.84 \cdot 10^{-3} + 4.3 \cdot 10^{-3} + 4.371 + 0.442 = 4.826 \; [K / W]$$

per un flusso pari a

$$q = \frac{65[K]}{4.826[K / W]} = 13.47 \; [W]$$

Per calcolare lo spessore che consente flusso massimo, notiamo che, essendo la ΔT data, questo si otterrà in corrispondenza della resistenza termica totale minima. Abbiamo visto che:

$$R_{tot} = \sum R_i = \frac{1}{2\pi r_i h_i L} + \frac{\ln(r_m / r_i)}{2\pi k_{tubo} L} + \frac{\ln(r_e / r_m)}{2\pi k_{isol} L} + \frac{1}{2\pi r_e h_e L}$$

Deriviamo rispetto ad r_e ed eguagliamo a zero tale derivata:

$$\frac{dR_{tot}}{dr_e} = \frac{1}{2\pi k_{isol} L} \cdot \frac{1}{r_e} - \frac{1}{2\pi h_e L} \cdot \frac{1}{r_e^2} = 0$$

$$\frac{r_e}{k_{isol}} = \frac{1}{h_e}$$

quindi

$$r_e = \frac{k_{isol}}{h_e}$$

Occorre fare 2 verifiche: 1) che si tratti veramente di un punto di minimo
2) che r_e sia maggiore di r_m

$$\frac{d^2 R_{tot}}{dr_e^2} = -\frac{1}{2\pi k_{isol} L} \cdot \frac{1}{r_e^2} + \frac{1}{\pi h_e L} \cdot \frac{1}{r_e^3}$$

$$\left.\frac{d^2 R_{tot}}{dr_e^2}\right|_{r_e = k_{isol}/h_e} = -\frac{1}{2\pi L} \cdot \frac{h_e^2}{k_{isol}^3} + \frac{1}{\pi L} \cdot \frac{h_e^2}{k_{isol}^3} =$$

$$= \frac{1}{2\pi L} \cdot \frac{h_e^2}{k_{isol}^3} > 0 \ \rightarrow \text{minimo}$$

affinché sia verificata la seconda condizione dovrà essere:

$$\frac{h_e \cdot r_m}{k_{isol}} < 1$$

Che è un numero di Biot .

Attenzione! il raggio è quello del tubo e non il raggio esterno. Nel caso in esame:

$$\frac{h_e \cdot r_m}{k_{isol}} = \frac{8 \cdot 0.015}{0.04} = 3$$

***Esercizio* 6**

Una portata di aria calda G= 0.05 [Kg] fluisce all'interno di un sottile tubo metallico del diametro D=0.15 [m]. L'aria entra ad una temperatura di 103 [°C] e, dopo 5 [m] la sua temperatura è scesa a 77 [°C]. Il coefficiente di scambio fra la superficie esterna del tubo e l'aria ambiente a T_∞ = 0 [°C] valga h_e= 6 [W/m2 K].

1) Calcolare la potenza termica ceduta dal tubo all'ambiente nel tratto considerato (L=5 [m]).

2) Determinare il flusso specifico e la temperatura superficiale del tubo in *x*= *L*.

Ipotesi:

1) Regime permanente
2) Proprietà costanti
3) ip. gas perfetto
4) variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili
5) resistenza termica del tubo trascurabile
6) coefficiente di scambio esterno costante e noto.

c_p va calcolato alla temperatura media fra le due sezioni :

$$\overline{T}_m = \frac{T_{m,0} + T_{m,L}}{2} = (103 + 77) / 2 + 273.15 \approx 363[K]$$

dalle tabelle si ottiene

$$c_p = 1010 \text{ [J/kg K]}$$

mentre le altre proprietà vanno calcolate alla T di uscita: per $T_{m,L}$=350 [K] si ottiene

k= 0.03 [W/m K]; μ= $208 \cdot 10^{-7}$ [Ns/m^2]; Pr= 0.70

1) Da un bilancio di energia per il tratto di tubo considerato:

$$q = G \cdot c_p \cdot (T_{m,L} - T_{m,0})$$
$$q = 0.05 \text{ [kg/s]} \cdot 1010 \text{ [J/kg]} \cdot (77\text{-}103)\text{[K]} = -1313 \text{ [W]}$$

2) Il flusso specifico potrà essere trovato considerando le resistenze in serie costituite dallo strato limite interno ed esterno al tubo in x=L, ovvero

$$q'' = \frac{T_{m,L} - T_\infty}{1 / h_x(L) + 1 / h_e}$$

Per valutare h_x determiniamo il regime di moto:

$$\text{Re}_D(L) = \frac{4G}{\pi D \mu} = \frac{4 \cdot 0.05}{\pi \cdot 0.15 \cdot 208 \cdot 10^{-7}} = 20404$$

il regime è turbolento.
Siccome il rapporto L/D= 33.3 (>10) è ragionevole assumere in x=L condizioni di flusso completamente sviluppato. Utilizzeremo la correlazione di Dittus-Boelter con n=0.3 (raffreddamento):

$$\overline{Nu}_D = 0.023 \cdot \text{Re}_D^{0.8} \cdot \text{Pr}^{0.3}$$

$$\overline{Nu}_D = \frac{h_x(L) \cdot D}{k} = 0.023 \cdot 20404^{0.8} \cdot 0.7^{0.3} = 57.9$$

$$h_x(L) = Nu_D \frac{k}{D} = 57.9 \cdot \frac{0.030}{0.15} = 11.6 \left[W / m^2 K\right]$$

ed infine

$$q'' = \frac{77 - 0}{1 / 11.6 + 1 / 6} = 304.5 \left[W / m^2\right]$$

Facendo nuovamente riferimento alle due resistenze in serie, possiamo scrivere, con riferimento ad esempio, all'esterno del tubo

$$q'' = \frac{T_{w,L} - T_\infty}{1 / h_e} \quad \Rightarrow \quad T_{w,L} = T_\infty + \frac{q''}{h_e} = 0 + \frac{304.5}{6} = \mathbf{50.7} \, [^\circ C]$$

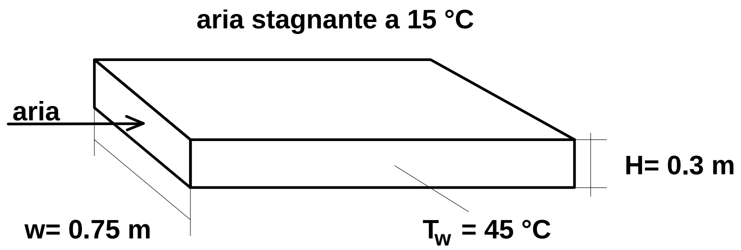
Nota:
Questo problema non è caratterizzato né da temperatura superficiale costante ne da flusso termico costante (con x). Sarebbe quindi sbagliato presumere che la perdita totale di calore sia data da:

$$q''(L) \cdot \pi D L = 717[W]$$

Questo risultato è sostanzialmente inferiore di quello ottenuto in quanto q'' diminuisce all'aumentare di x. Tale diminuzione è dovuta sia alla diminuzione di $h_x(x)$ che a quella di $T_m(x)-T_\infty$.

***Esercizio* 7**

Dell'aria fluisce in un condotto a sezione rettangolare 0.75 [m]×0.3 [m] e mantiene la temperatura esterna del condotto a 45 °C. Se il condotto è esposto all'aria ambiente a 15 °C quale è la potenza termica dispersa per unità di lunghezza del condotto stesso?



Proprietà termofisiche dell'aria alla temperatura del film

$$T_f = (15+45)/2+273.15 = 303 \text{ K}$$

$\nu = 16.2\cdot10^{-6}$ [m²/s]; $a = 22.9\cdot10^{-6}$ [m²/s]; $k = 0.0265$ [W/mK]; $\beta = 0.0033$ [K⁻¹]

$$Pr = 0.71$$

Il numero di Rayleigh sarà diverso per le pareti laterali rispetto a quelle orizzontali:

$$R_{a\,L} = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) L^3}{\nu a} = \frac{0.0033\cdot 9.81\cdot 30\cdot L^3}{16.2\cdot10^{-6}\cdot 22.9\cdot10^{-6}} =$$

$$= 2.62\cdot10^9\cdot L^3$$

Per le due pareti laterali L= H= 0.3 m e quindi $Ra_L = 7.07\cdot10^7$; la convezione risulta quindi laminare. Utilizzeremo la seguente:

$$\overline{N}_{u\,L} = 0.68 + \frac{0.670\cdot Ra_L^{1/4}}{\left[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}$$

$$\overline{N}_{u\,L} = 0.68 + \frac{0.670\cdot(7.07\cdot10^7)^{1/4}}{\left[1+(0.492/0.71)^{9/16}\right]^{4/9}} = 47.8$$

$$\overline{h} = \frac{k}{L}\overline{N}_{u\,L} = \frac{0.0265}{0.3}47.8 = 4.23\left[W/m^2K\right]$$

Per la parete superiore ed inferiore $L = A/p$.

Attenzione che la lunghezza del condotto non è 1 m , infatti è solo una schematizzazione per calcolare il flusso unitario. Facendo tendere ad infinito la lunghezza il rapporto A/p tende ad $w/2$ che assumeremo come grandezza significativa anche se, in realtà, essendo la lunghezza molto maggiore della larghezza occorrerebbe utilizzare la formula per le *strip* (non data).

In definitiva per le sup laterali otteniamo

$$R_{a\,L} = 2.62\cdot10^9\cdot L^3 = 1.38\cdot10^8$$

Useremo allora le seguenti (vedi pag. 2)

top $\overline{Nu}_L = \dfrac{\overline{h} \cdot L}{k} = 0.15 \cdot (Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^{1/3}$ per $2{\cdot}10^7 < Gr_L\, Pr < 3{\cdot}10^9$

ovvero

$$\overline{h} = \frac{0.0265}{0.375} 0.15 \cdot (1.38 \cdot 10^8)^{1/3} = 5.48 \left[W / m^2 K \right]$$

bottom $\overline{Nu}_L = 0.27 \cdot (Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^{1/4}$ per $10^5 < Gr_L\, Pr < 10^{10}$

$$\overline{h} = \frac{0.0265}{0.375} 0.27 \cdot (1.38 \cdot 10^8)^{1/4} = 2.07 \left[W / m^2 K \right]$$

ed infine

$$q' = (2 \cdot 4.23 \cdot 0.3 + 5.48 \cdot 0.75 + 2.07 \cdot 0.75)(30) = 246 \left[W / m \right]$$

Si noti che il contributo radiativo sarebbe significativo.
Assumendo ε=1 e T_{amb}=288 K si ha:

$$q = \sigma \varepsilon A (T_w^4 - T_{amb}^4) = 5.67 \cdot 10^{-8}\ 2.1 \cdot (318^4 - 288^4) = 398\ [\mathrm{W/m}]$$

Corso di ENERGETICA 1 (Mecc) (AA 03/04)

Esercitazioni con richiami teorici

3

scambiatori di calore

Introduzione

Gli scambiatori di calore sono organi nei quali si ha trasmissione di calore fra fluidi a temperature diverse. I fluidi possono essere liquidi o aeriformi, con o senza passaggio di fase. Il più semplice dispositivo per ottenere ciò è un contenitore nel quale si mescolino direttamente un fluido caldo ed uno freddo, sono detti *rigeneratori*. Più comune è comunque il caso in cui i due fluidi sono separati da una parete o setto, attraverso cui fluisce il calore, detti *recuperatori*.
Sono esempi di scambiatori di calore i radiatori delle automobili (scambio fra acqua di raffreddamento del motore e aria atmosferica), i tubi alettati dei frigoriferi domestici (scambio fra fluido frigorigeno caldo proveniente dal compressore e aria), i radiatori spaziali (c'è un solo fluido e il calore è dissipato per irraggiamento termico nello spazio), i condensatori (il calore latente di condensazione è asportato dall'acqua di refrigerazione passando attraverso banchi di tubi).
In certi impianti lo scambiatore di calore è il componente più importante e costoso. Di conseguenza la progettazione di uno scambiatore comporta, oltre allo studio termofluidodinamido, anche uno studio di ottimizzazione ed analisi dei costi.

Esistono vari modi di classificare gli scambiatori ad esempio:
1) in base alla compattezza
2) in base alle caratteristiche costruttive
3) in base alla direzione e verso del flusso dei fluidi
4) in base al meccanismo di scambio termico

1) La *compattezza* è definita come il rapporto fra la superficie (max.) di scambio termico e il volume dello scambiatore, se tale rapporto è > 700 m^2/m^3 lo scambiatore è considerato compatto. Esempi: radiatori per automobili - 1100 m^2/m^3, radiatori ceramici per motori a turbina a gas - 6600 1100 m^2/m^3, normali scambiatori a fascio tubiero e mantello - da 70 a 500 m^2/m^3 , questi non sono quindi considerati compatti.

2) Si trovano comunemente scambiatori **tubolari**, a **tubi alettati**, a **parete**, a **parete alettata**. Gli scambiatori a fascio tubiero sono molto diffusi a causa della loro facilità costruttiva e per il costo relativamente basso. La tipologia più comune è quella a fascio tubiero e mantello rappresentata schematicamente in figura 1 e 2.

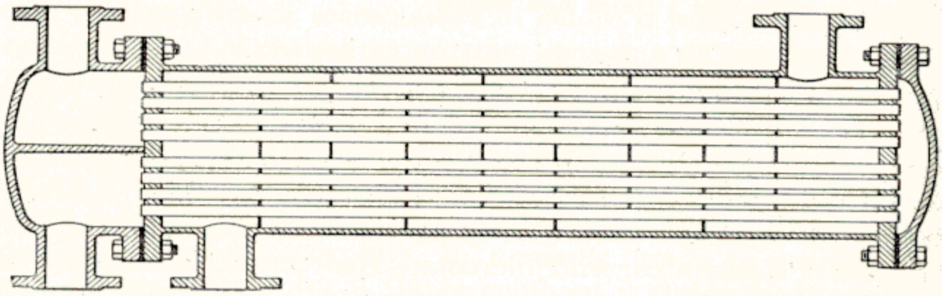


Fig. 1 **Scambiatore di calore a tubi e mantello con diaframmi a segmento: due passaggi nei tubi ed un passaggio nel mantello.**

Tipi più comuni di scambiatori di calore

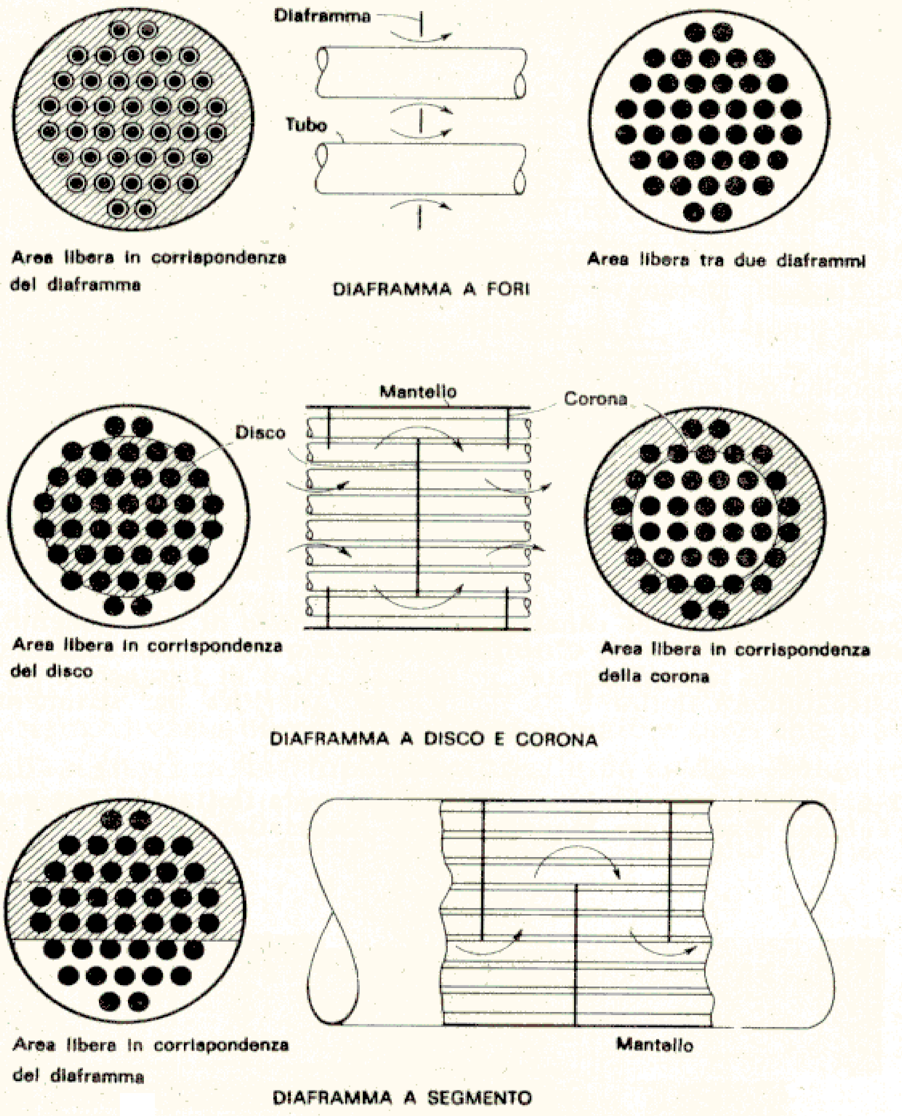
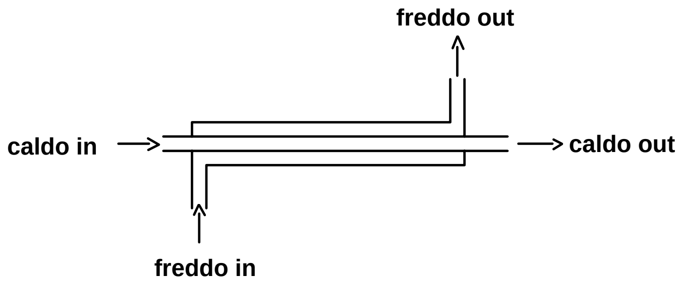


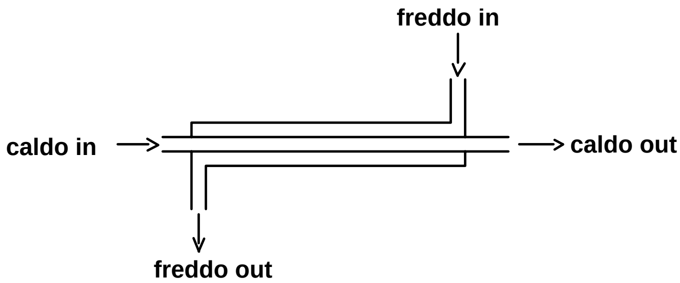
Fig. 2 . Tre tipi di diaframmi usati negli scambiatori di calore a tubi e mantello. (Da C. B. Cramer, *Heat Transfer*, 2a ed. International Textbook Company, Scranton, Pa.).

3) Relativamente al flusso dei fluidi gli scambiatori di calore vengono classificati come di seguito:

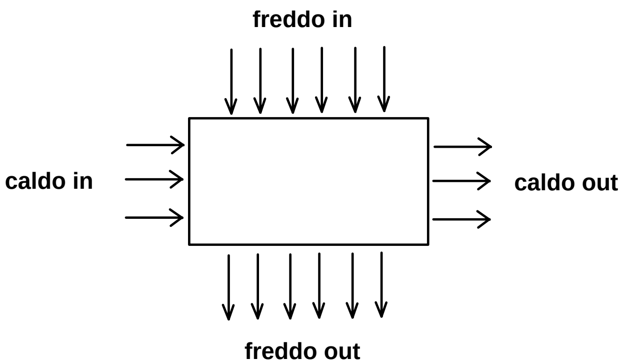
<u>*correnti parallele equiverse*</u>: i fluidi caldo e freddo entrano dalla stessa estremità dello scambiatore, scorrono nella stessa direzione e lasciano insieme l'altra estremità.



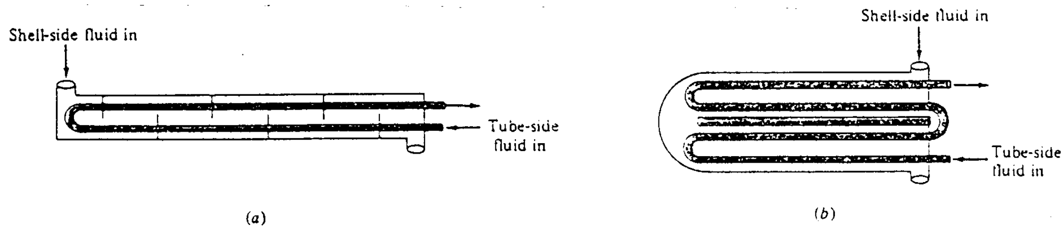
<u>*controcorrente*</u>: il fluido caldo e freddo entrano in corrispondenza delle estremità opposte dello scambiatore e scorrono in direzioni opposte.



<u>*correnti incrociate*</u>: i due fluidi scorrono ad angolo retto uno rispetto all'altro.



<u>*passaggi multipli*</u>: configurazione comunemente usata in quanto aumenta l'efficienza dello scambiatore nel suo complesso.



4) A seconda del meccanismo di scambio possiamo ad esempio avere: condensatori, ebollitori, radiatori.
I condensatori sono usati in numerose applicazioni quali: impianti termoelettrici di potenza, impianti chimici, impianti nucleari, etc. Gli ebollitori sono uno dei primi tipi di scambiatori. I radiatori cedono calore per irraggiamento. (i radiatori delle automobili non si dovrebbero chiamare così).

Il **progetto** di uno scambiatore si divide in tre fasi:
a- lo studio termico
b- il progetto meccanico preliminare
c- il progetto esecutivo

Lo studio termico, oggetto di queste note, riguarda principalmente il calcolo dell'area della superficie di scambio termico necessaria, una volta assegnate le temperature e le portate dei fluidi.
Il progetto meccanico studia le questioni connesse con le pressioni e temperature di esercizio, le caratteristiche di corrosione, le dilatazioni e le tensioni. Infine viene presa in considerazione l'interdipendenza fra lo scambiatore ed il resto dell'impianto.
Il *progetto esecutivo* si occupa della scelta dei materiali, delle guarnizioni, degli accorgimenti meccanici. I procedimenti costruttivi devono essere specificati. Le caratteristiche fisiche devono essere tradotte in una apparecchiatura che possa poi essere realizzata a basso costo.

Andamento qualitativo della temperatura
Lo scambio di calore tra il fluido caldo e quello freddo provoca una variazione di temperatura di uno od entrambi i fluidi. Alcuni esempi qualitativi sono dati nelle figure seguenti.

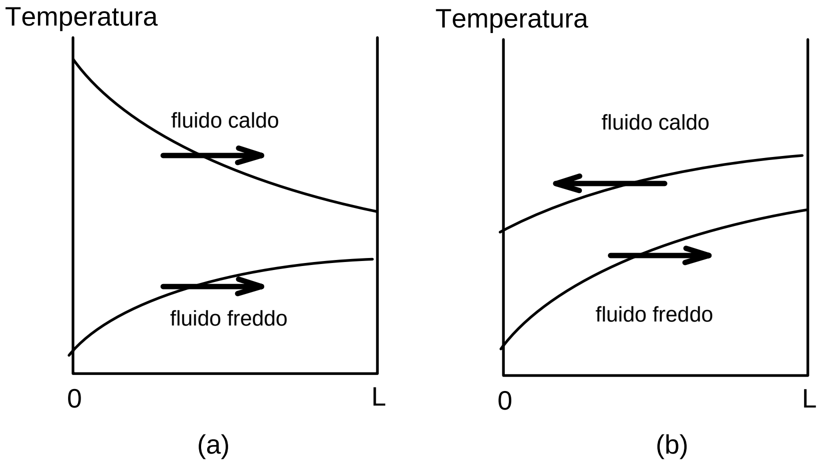


Fig. 3

In figura 3a è rappresentato il caso di uno scambiatore a correnti parallele equiverse. All'uscita dello scambiatore il fluido più freddo avrà sempre una temperatura inferiore a quella del fluido caldo. L'efficienza termica è piuttosto limitata. La figura 3b fa riferimento ad uno scambiatore controcorrente: in questo caso la temperatura in uscita del fluido freddo può essere maggiore di quella in uscita del fluido caldo.

Differenza media significativa di temperatura

Le relazioni fondamentali per il calcolo e l'analisi degli scambiatori di calore si ottengono mediante bilanci energetici.
In particolare sarà:

$$q= G_h \cdot (h_{h,i} - h_{h,o}) \quad (1)$$
$$q= G_c \cdot (h_{c,o} - h_{c,i}) \quad (2)$$

dove G è la portata, h l'entalpia, mentre i pedici stanno per:
h= hot, c= cold, i= in , o= out

la (1) rappresenta la potenza ceduta dal fluido caldo e la (2) quella acquistata dal fluido freddo. Tali potenze saranno uguali se si trascurano le perdite verso l'esterno, le energie cinetiche e potenziali e la conduzione assiale lungo i tubi.
Se inoltre i fluidi non sono soggetti a passaggio di fase e si assumono costanti i calori specifici potremo scrivere:

$$q= G_h \cdot c_{p,h} \cdot (T_{h,i} - T_{h,o}) \quad (3)$$
$$q= G_c \cdot c_{p,c} \cdot (T_{c,o} - T_{c,i}) \quad (4)$$

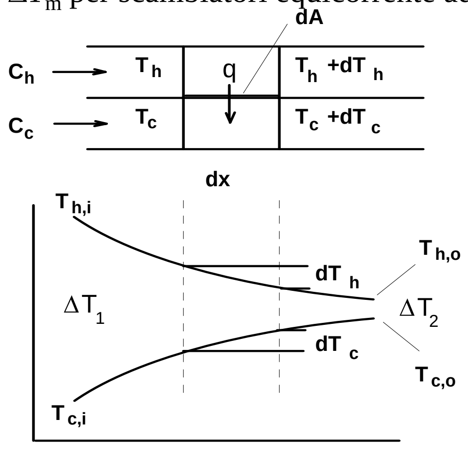
Un'altra relazione utile si ottiene da una estensione della legge di Newton, mettendo in relazione il flusso totale di calore con la differenza T_h-T_c fra fluido caldo e fluido freddo. Siccome tale differenza non è costante lungo lo scambiatore, si introduce una differenza media significativa ΔT_m definita come:

$$q=U \cdot A \cdot \Delta T_m \quad (5)$$

dove U , come già visto è un coefficiente di scambio termico globale per unità di superficie, ipotizzato costante.
Riscriviamo ora la (3) e la (4) come

$$q= C_h \cdot (T_{h,i} - T_{h,o}) \quad (6)$$
$$q= C_c \cdot (T_{c,o} - T_{c,i}) \quad (7)$$

dove $C_h = G_h \cdot c_{p,h}$ e $C_c = G_c \cdot c_{p,c}$ sono usualmente detti *flussi di capacità termica.*
Vediamo ora di ricavare ΔT_m per scambiatori equicorrente ad un passaggio:



Applichiamo l'equazione di bilancio all'elemento di lunghezza dx .

$$dq = -C_h \cdot dT_h \tag{8}$$
$$dq = C_c \cdot dT_c \tag{9}$$

ed inoltre

$$dq = U \cdot dA \cdot \Delta T \qquad (\ \Delta T = T_h - T_c) \tag{10}$$

(dove si è supposto U indipendente dalle temperature)

Dalla (8) e(9) possiamo scrivere:

$$dT_h - dT_c = -dq \cdot \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right) = d(\Delta T)$$

ricaviamo dq e sostituiamolo nella (10):

$$-\frac{d(\Delta T)}{\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right)} = UdA\Delta T$$

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -U\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right) dA \tag{11}$$

integrando fra le sezioni di ingresso e di uscita (1 e 2) ottengo:

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right)$$

utilizzando poi la (6) e la (7)

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -\frac{UA}{q}\left(T_{h,i} - T_{h,o} + T_{c,o} - T_{c,i}\right) = -\frac{UA}{q}\left(T_{h,i} - T_{c,i} - T_{h,o} + T_{c,o}\right) = -\frac{UA}{q}\left(\Delta T_1 - \Delta T_2\right)$$

ed infine:

$$q = UA\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \tag{12}$$

da un confronto con la (5) si evince:

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \qquad \text{differenza media logaritmica} \tag{13}$$

Nel caso di flussi in controcorrente si ricava una espressione identica alla precedente dove però:

$\Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o}$
$\Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,i}$

queste espressioni per ΔT_m non valgono per scambiatori di natura differente , ad esempio a correnti incrociate o a passaggi multipli. In questi casi per ricavare il valore corretto di ΔT_m si utilizza un fattore di correzione F, ovvero

$$\Delta T_m = F \cdot MLTD$$

F , funzione di due parametri, R e P, viene fornito usualmente in forma di grafici per una assegnata geometria dello scambiatore (vedi fig. 4).

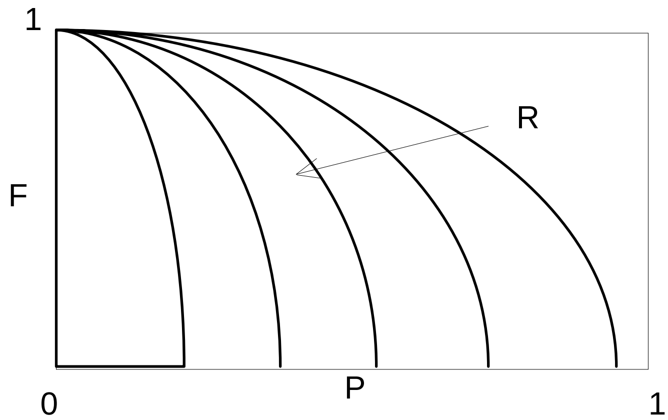


Fig. 4

dove

$$P = \frac{T_{t,o} - T_{t,i}}{T_{M,i} - T_{t,i}}\ ; \qquad R = \frac{T_{M,i} - T_{M,o}}{T_{t,o} - T_{t,i}}$$

il pedice M fa riferimento al mantello , t ai tubi.

Si nota che **1)** non ha importanza se il fluido caldo scorre nei tubi o nel mantello.
2) se uno dei fluidi è soggetto a cambiamenti di fase allora F=1

Distribuzioni di temperatura (equicorrente)

Riprendiamo l'eq. (11) ed integriamola fra la sezione (1) (x=0 A(x)=0) ed una sezione generica, ottenendo:

$$\ln \frac{\Delta T(x)}{\Delta T_1} = -UA(x)\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h}\right)$$

$$\Delta T(x) = \Delta T_1 \cdot e^{-U \cdot (1/C_c + 1/C_h) \cdot A(x)}$$

ricaviamo ora dq dalla (10) e sostituiamolo, ad esempio, nella (9)

$$dq = U \cdot \Delta T_1 \cdot e^{-U \cdot (1/C_c + 1/C_h) \cdot A(x)} dA$$

$$dT_c = \frac{U}{C_c} \cdot \Delta T_1 \cdot e^{-U \cdot (1/C_c + 1/C_h) \cdot A(x)} dA$$

a questo punto una ulteriore integrazione porta all'espressione di T_c(x) e, siccome ΔT(x) è già stata calcolata, a quella di $T_h(x)=T_c(x) + \Delta T(x)$:

$$T_c(x) = T_{c,i} + \frac{C_h}{C_c + C_h} \cdot \Delta T_1 \cdot \left[1 - e^{-U \cdot (1/C_c + 1/C_h) \cdot A(x)}\right]$$

Coefficiente di scambio termico globale (trasmittanza)

Riconsideriamo l'eq.(5) ovvero:

$$q=U\cdot A\cdot \Delta T_m$$

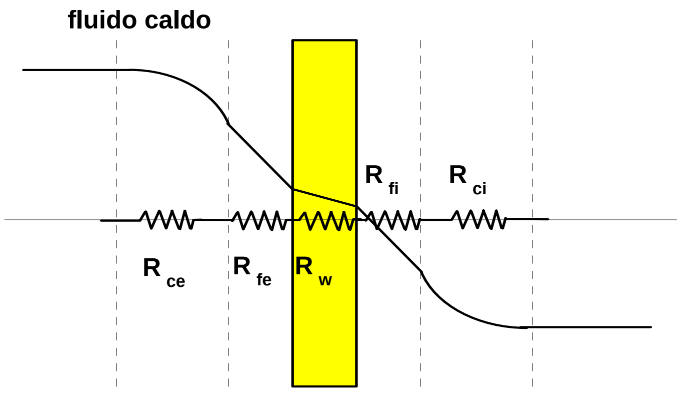
Stabilito come ricavare ΔT_m passiamo al coefficiente globale di scambio U (per unità di superficie). Faremo sempre riferimento alla superficie esterna dei tubi A_e ($U_e \cdot A_e = U_i \cdot A_i$) In uno scambiatore di calore le resistenze termiche presenti lungo il percorso dello scambio fra fluido caldo e fluido freddo comprendono:

1) le resistenze *liminari* (convettive) dei due fluidi
2) le resistenze dovute alla presenza di depositi sulle pareti
3) la resistenza termica della parete stessa

Facendo riferimento ad uno scambiatore tubolare avremo , fra interno ed esterno:

$$R = Rc_i + Rf_i + Rw + Rf_e + Rc_e$$

Rc_i, Rc_e = resistenze convettive interna ed esterna
Rf_i, Rf_e = resistenze dovute ai depositi
Rw = resistenza conduttiva della parete



Per le varie resistenze avremo:

$$Rc_i = \frac{1}{A_i h_i} \quad Rc_e = \frac{1}{A_e h_e} \quad Rw = \frac{r_e - r_i}{A_m k} \quad Rf_i = \frac{F_i}{A_i} \quad Rf_e = \frac{F_e}{A_e}$$

con	h_i, h_e	coeff. di scambio convettivo	[W/m^{2}K]
	F_i,F_e	fouling-factors parete-fluido	[m^{2}K/W]
	k	conduttività termica della parete	[W/m K]

$$A_m = \frac{A_e - A_i}{\ln \dfrac{A_e}{A_i}}$$

per unità di superficie esterna A_e avremo allora :

$$U_e = \frac{1}{\frac{D_e}{D_i h_i} + \frac{D_e}{D_i} F_i + \frac{D_e}{2k} \ln \frac{D_e}{D_i} + F_e + \frac{1}{h_e}} \left[\mathrm{W/m^2K}\right]$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + F_i + \frac{D_i}{2k} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{D_i}{D_e} F_e + \frac{D_i}{D_e h_e}} \left[\mathrm{W/m^2K}\right]$$

ovviamente $$U_e A_e = U_i A_i = \frac{1}{\frac{1}{\pi D_i L h_i} + \frac{F_i}{\pi D_i L} + \frac{1}{2\pi L k} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{F_e}{\pi D_e L} + \frac{1}{\pi D_e L h_e}} \left[\mathrm{W/K}\right] \qquad (14)$$

seguono alcuni valori orientativi per scambiatori a fascio tubiero:
Attenzione D_e non è il diametro del tubo esterno ma il diametro esterno del tubo interno.

H_2O-olio	60÷350
gas-gas	60÷600
condensatori di vapore	1500÷5000

i fouling-factors *F* possono essere determinati tramite tabelle.
Per valutare i coefficienti convettivi di scambio *h* occorre determinare il numero di Reynolds Re_D e quindi , a seconda del regime di moto, scegliere una opportuna correlazione

$$N_u = f(Re, Pr) \qquad Pr = \nu/a$$

Il calcolo di $Re_D = \frac{4G}{\pi D \mu}$ richiede la conoscenza delle portate.

Infine si ricava *h* da $h = \frac{N_u k}{D}$

Efficienza di uno scambiatore

Si definisce efficienza di uno scambiatore il rapporto fra la potenza termica effettivamente scambiata nel dispositivo e quella scambiata in uno scambiatore controcorrente caratterizzato da una superficie di scambio infinita, quest'ultima rappresenta la potenza massima scambiabile q_{max}.
si ha

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{max}}$$

Per una potenza termica finita, se $U \cdot A$ tende ad infinito ΔT_m dovrà tendere a zero, il che si verifica se o $\Delta T_1 = 0$ o $\Delta T_2 = 0$

nel primo caso ho

$$T_{h,i} = T_{c,o}$$

e dalla (6) e (7)

$$q_1 = C_h \cdot (T_{c,o} - T_{h,o}) = C_c \cdot (T_{h,i} - T_{c,i})$$

nel secondo

$$T_{h,o} = T_{c,i}$$

e dalla (6) e (7)

$$q_2 = C_h \cdot (T_{h,i} - T_{c,i}) = C_c \cdot (T_{c,o} - T_{h,o})$$

siccome $(T_{h,i} - T_{c,i}) > (T_{c,o} - T_{h,o})$ in quanto $T_{h,i} \geq T_{c,o}$ e $T_{h,o} \geq T_{c,i}$

il 1° caso si verificherà quando $C_c < C_h$ $(\Delta T_1 = 0)$
il secondo quando $C_h < C_c$ $(\Delta T_2 = 0)$
ed in entrambi potrò esprimere q_{max} come

$$q_{max} = C_{min}(T_{h,i} - T_{c,i}) = C_{max}(T_{c,o} - T_{h,o}) \tag{15}$$

Utilizziamo la 1ª e scriviamo:

$$\varepsilon = \frac{q}{C_{min}(T_{h,i} - T_{c,i})} \tag{16}$$

nota l'efficienza, si otterrà la potenza semplicemente come:

$$q = \varepsilon\, C_{min}(T_{h,i} - T_{c,i}) \tag{17}$$

Vediamo ora l'utilità della relazione (17).

I calcoli relativi agli scambiatori di calore sono solitamente riconducibili a due categorie.

1) Progetto dello scambiatore; **2)** Analisi delle prestazioni dello scambiatore

Consideriamo il 1° caso
In questa ipotesi di lavoro solitamente sono note le temperature di ingresso e le portate dei fluidi a fronte della temperature desiderate di uscita (q e 2 temp. note o 3 temp. note, l'altra si ottiene usando le equazioni di bilancio (6) o (7)). Calcolato o noto U (coeff. globale di scambio) il problema è determinare la superficie totale di scambio A. Un modo di procedere è quello di ricavare la *MLTD* (dalle T di ingresso e di uscita), utilizzare grafici e tabelle per ricavare F e quindi ΔT_m . Ricavato q dalla (6) o (7) si utilizzerà poi la (5) per ottenere:

$$A = \frac{q}{U \Delta T_m}$$

Un altro approccio è quello di utilizzare l'efficienza dello scambiatore. Infatti si dimostra che per gli scambiatori valgono le seguenti

$$\varepsilon = \varepsilon\left(NTU, \frac{C_{min}}{C_{max}} \right) \quad \text{con} \quad NTU = \frac{U \cdot A}{C_{min}} \quad (\text{ number of transfer units })$$

tale legame è disponibile in letteratura sotto forma di grafici per ogni tipologia di scambiatore.

Si procede allora così: si calcola q dalle eq. di bilancio, quindi ε utilizzando la (16). Da ε e C_{min}/C_{max} si ricava *NTU* dal grafico e quindi A dalla definizione,

$$A = \frac{NTU \cdot C_{\min}}{U}$$

I due metodi, quello della differenza media logaritmica e quello dell'efficienza sono equivalenti per questo tipo di problema. Vediamo ora il caso dell'analisi delle prestazioni dello scambiatore.

2° caso

E' noto il tipo e le dimensioni dello scambiatore ed è richiesto di determinare la potenza termica trasmessa e le temperature di uscita a partire dalla conoscenza delle portate e delle temperature di ingresso (fluido caldo e freddo).

In questo caso il metodo *LMTD* è più oneroso in quanto dapprima assegnare un valore di tentativo ad una delle temperature di uscita per poter applicare la (16) e la (17). Ottenuta l'altra temperatura di uscita e la potenza q_1 si calcolerà ΔT_m e mediante la (5) otterremo q_2 . Solo se, per caso $q_1 = q_2$ il problema sarà risolto. In genere $q_1 \neq q_2$ perché il valore ipotizzato per la T di uscita (ad es. $T_{c,o}$) non è esatto. Utilizzando allora q_2 e la relazione (7) otteniamo un nuovo valore di tentativo per $T_{c,o}$. Occorrerà qualche iterazione per ottenere la convergenza.

Più semplice appare invece il metodo *NTU*. Dalla conoscenza del tipo e delle dimensioni dello scambiatore e dalle capacità termiche orarie (flussi di capacità termica) si ottiene *NTU* e C_{min}/C_{max} , mediante il grafico opportuno si ottiene ε ed infine q applicando la (17) che richiede la conoscenza delle sole temperature di ingresso. Infine utilizzando la (6) e la (7) otteniamo le temperature di uscita.

***Esercizio* 1**

Dell'acqua calda a temperatura T_m = 80 °C ed a una velocità media u_m= 0.4 [m/s] fluisce all'interno di un tubo di acciaio: D_i= 3.8 [cm]; D_e= 4.8 [cm]; $k_{acciaio}$= 50 [W/mK]. Il moto si considera sviluppato completamente così come lo scambio termico. La superficie esterna del tubo è esposta all'aria atmosferica a T_∞ =20 [°C] in moto con velocità normale al tubo pari a u_∞ = 30 [m/s]. Calcolare la trasmittanza U per unità di area esterna ed il flusso disperso per unità di lunghezza del tubo.

Le proprietà termofisiche dell'acqua alla T_m= 80 °C sono:

ν= 0.364·10^{-6} [m2/s] k= 0.668 [W/mK] Pr= 2.22

Il numero di Reynolds per l'acqua risulta:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_m \cdot D_i}{\nu} = \frac{0.4 \cdot 0.038}{0.364 \cdot 10^{-6}} = 41760$$

Il regime di moto è turbolento: per il calcolo di h_i (lato H_2O) potremo usare la correlazione di Dittus-Boelter (moto e campo termico compl. sviluppati)

n=0.3 perché l'acqua si raffredda:

$$\overline{N}u_D = 0.023 \cdot \mathrm{Re}_D^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}^{0.3}$$

$$\overline{N}u_D = 0.023 \cdot (41760)^{0.8} \cdot (2.22)^{0.3} = 145.3$$

$$Nu_D = \frac{h_i \cdot D_i}{k_{H_2O}} \quad \Rightarrow \; h_i = 145.3 \cdot \frac{0.668}{0.038} = 2554 \left[W / m^2 K\right]$$

Le proprietà termofisiche dell'aria vanno calcolate alla temperatura media del film

$$T_f = \frac{80+20}{2} = 50[°C]$$

v= 18.22·10^{-6} [m2/s] k= 0.0281 [W/mK] Pr= 0.703

Il numero di Reynolds per l'aria risulta:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_\infty \cdot D_e}{v} = \frac{30 \cdot 0.048}{18.22 \cdot 10^{-6}} = 7903$$

Per questa geometria ed in regime turbolento si può usare la correlazione:

$$Nu = \left(0.4 \cdot \mathrm{Re}^{0.5} + 0.06 \cdot \mathrm{Re}^{2/3}\right) \cdot \mathrm{Pr}^{0.4}$$
$$Nu = \left(0.4 \cdot 7903^{0.5} + 0.06 \cdot 7903^{2/3}\right) \cdot 0.703^{0.4}$$
$$Nu = 51.6$$
$$h_e = 51.6 \cdot \frac{0.0281}{0.048} = 30.2 \left[W / m^2 K\right]$$

Trascurando i fouling factors si ha:

$$U_e = \frac{1}{\dfrac{D_e}{D_i h_i} + \dfrac{D_e}{2k_{acc}} \ln \dfrac{D_e}{D_i} + \dfrac{1}{h_e}}$$

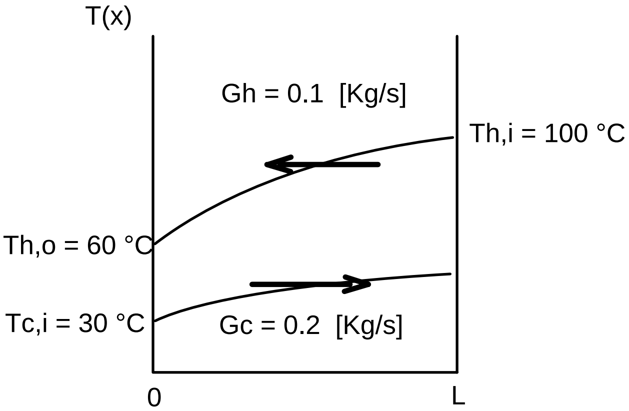
$$U_e = \frac{1}{\underbrace{\dfrac{4.8}{3.8 \cdot 2554}}_{0.000495} + \underbrace{\dfrac{0.048}{2 \cdot 50} \ln \dfrac{4.8}{3.8}}_{0.000112} + \underbrace{\dfrac{1}{30.2}}_{0.033}} = 29.66 \left[W / m^2 K\right]$$

Il flusso termico disperso per unità di lunghezza del tubo vale:

$$q' = \pi \cdot D_e \cdot U_e \cdot (T_i - T_e) =$$
$$= \pi \cdot 0.048 \cdot 29.66 \cdot (80 - 20) = 268.4 [W / m]$$

***Esercizio* 2 (progetto)**

Uno scambiatore controcorrente a tubi concentrici viene usato per raffreddare l'olio lubrificante del motore di una grande turbina a gas. La portata di acqua refrigerante attraverso il tubo interno (D_i= 25 mm) è pari a 0.2 kg/s, mentre la portata di olio nella camicia esterna (D_0= 45 mm) vale 0.1 kg/s. L'olio e l'acqua entrano rispettivamente alla temperatura di 100 e 30 °C. Quanto dovrà essere lungo il tubo affinché la temperatura di uscita dell'olio valga 60 °C ? Quanto vale l'efficienza ε dello scambiatore ?



Ipotesi:

1) perdite di calore verso l'esterno trascurabili.
2) variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili.
3) proprietà termofisiche costanti
4) resistenza termica della parete separatrice trascurabile
5) regime di moto completamente sviluppato (U indipendente da *x*)

Dalle tabelle dell'olio inesausto e dell'acqua si ricava:
Olio ($\overline{T}_h = 80[°C] = 353[K]$)
c_p= 2131 [J/kg K]; μ= $3.25 \cdot 10^{-2}$ [Ns/m^2]; k= 0.138 [W/mK]
Acqua ($\overline{T}_c = 35[°C] = 308[K]$ ipotizzata)
c_p= 4178 [J/kg K]; μ= $725 \cdot 10^{-6}$ [Ns/m^2]; k= 0.625 [W/mK]; Pr= 4.85

La potenza termica si ricava dall'equazione di bilancio applicata al fluido caldo:

$$q = G_h \cdot c_{p,h} \cdot (T_{h,i} - T_{h,o})$$

$$q = 0.1 \cdot 2131 \cdot (100 - 60) = 8524 \text{ [W]}$$

conoscendo la potenza possiamo ora ricavare la temperatura d'uscita dell'acqua utilizzando l'eq di bilancio applicata al fluido freddo:

$$q = G_c \cdot c_{p,c} \cdot (T_{c,o} - T_{c,i})$$

$$T_{c,o} = T_{c,i} + \frac{q}{G_c \cdot c_{p,c}} = 30 + \frac{8524}{0.2 \cdot 4178} = 40.2[°C]$$

La temperatura media utilizzata per calcolare le proprietà dell'acqua andava quindi bene. In caso contrario si itera.

Per ottenere la lunghezza dello scambiatore utilizziamo la relazione di scambio:

$$q = U \cdot A \cdot \Delta T_m \qquad \text{con} \qquad \Delta T_m = MLTD$$

calcoliamo la ΔT media logaritmica (controcorrente):

$$MLTD = \frac{(T_{h,1} - T_{c,o}) - (T_{h,o} - T_{c,i})}{\ln\left[(T_{h,1} - T_{c,o}) / (T_{h,o} - T_{c,i})\right]} = \frac{59.8 - 30}{\ln(59.8/30)} = 43.2[°C]$$

L'espressione per la trasmittanza è:

$$U = \frac{1}{\frac{D_e}{D_i h_i} + \frac{D_e}{D_i} F_i + \frac{D_e}{2k} \ln \frac{D_e}{D_i} + F_e + \frac{1}{h_e}} \qquad \left[\mathrm{W/m^2K}\right]$$

trascurando lo spessore del setto($D_e/D_i = 1$) e i fouling factors abbiamo:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e}}$$

Calcoliamo i coefficienti di scambio:

Acqua-tubo , h_i

Il n° di Reynolds vale:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{4 \cdot G_c}{\pi D_i \cdot \mu_c} = \frac{4 \cdot 0.2}{\pi \cdot 0.025 \cdot 725 \cdot 10^{-6}} = 14050 \quad >2100$$

il moto è quindi turbolento ed utilizzeremo la correlazione di Dittus Boelter con n=0.4 perché l'acqua si scalda:

$$\overline{Nu}_D = 0.023 \cdot \mathrm{Re}_D^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}^{0.4}$$

$$\overline{Nu}_D = 0.023 \cdot (14050)^{0.8} \cdot (4.85)^{0.4} = 90$$

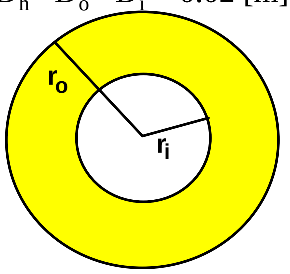
per cui

$$h_i = Nu_D \cdot \frac{k_c}{D_i} = \frac{90 \cdot 0.625}{0.025} = 2250 \left[W/m^2K\right]$$

Tubo-olio , h_e

Il coefficiente che ci interessa è quello fra olio e superficie interna del condotto anulare (vedi figura). Il diametro equivalente si calcola con la formula

$$D_h = D_o - D_i = 0.02 \text{ [m]}$$



per cui

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho_h \cdot u_m \cdot D_h}{\mu_h} = \frac{\rho_h \cdot (D_o - D_i)}{\mu_h} \cdot \frac{4 \cdot G_h}{\rho_h \cdot \pi \cdot (D_o^2 - D_i^2)}$$

$$\mathrm{Re}_D = \frac{4 \cdot G_h}{\pi \cdot (D_o + D_i) \cdot \mu_h} = \frac{4 \cdot 0.1}{\pi \cdot 0.07 \cdot 3.25 \cdot 10^{-2}} = 56$$

e quindi il flusso è laminare ed **in questo caso** il numero di Nusselt può essere ricavato dalla seguente tabella se si assume che <u>la temperatura della parete a cui si cede calore sia uniforme e che la superficie esterna sia perfettamente isolata</u>.

D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0	-	3.66
0.05	17.46	4.06
0.10	11.56	4.11
0.25	7.37	4.23
0.50	5.74	4.43
1.00	4.86	4.86

In corrispondenza a D_i/D_o = 0.56, interpolando si ottiene:

$$Nu_i = \frac{h_o \cdot D_h}{k_h} = 5.56 \quad \Rightarrow \quad h_o = 5.56 \cdot \frac{0.138}{0.02} = 38.4 \left[W/m^2K\right]$$

Il coefficiente globale di scambio varrà quindi:

$$U = \frac{1}{1/2250 + 1/38.4} = 37.8 \left[W/m^2K\right]$$

Siccome $q = U \cdot A \cdot \Delta T_m$ con $A = \pi \cdot D_i \cdot L$ sarà

$$L = \frac{q}{\pi \cdot D_i \cdot U \cdot \Delta T_m} = \frac{8524}{\pi \cdot 0.025 \cdot 37.8 \cdot 43.2} = 66.6 \left[m\right]$$

Infine, per ricavare l'efficienza dello scambiatore, troviamo il flusso di capacità termica minimo ed utilizziamo la (16):

$$G_c \cdot c_{p,c} \cdot = 0.2 \cdot 4178 = 835.6 \text{ [W/K]}$$
$$G_h \cdot c_{p,h} \cdot = 0.1 \cdot 2131 = 213.1 \text{ [W/K]} = \boldsymbol{C_{min}}$$
$$\varepsilon = \frac{q}{C_{\min}(T_{h,i} - T_{c,i})} = \frac{8524}{213.1 \cdot (70)} = 0.57$$

Verifichiamo con i grafici:
il rapporto C_{min}/C_{max} vale 213.1/835.6 = **0.255**.
il numero di *NTU* vale

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{q}{C_{\min} \cdot \Delta T_m} = \frac{8524[W]}{231.1[W/K] \cdot 43.2} = 0.85$$

Per tali valori si ottiene, dal grafico, proprio un ε nell'ordine di 0.55

Commenti:

1) il processo è essenzialmente controllato da h_o. Per questo si ottiene una lunghezza rilevante.

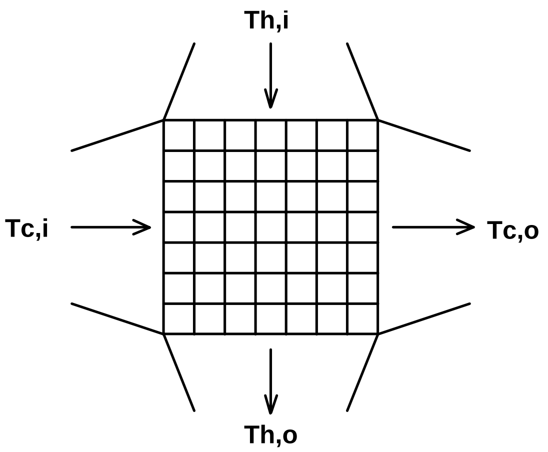
2) siccome $h_i >> h_o$ la temperatura del tubo sarà molto simile a quella dell'acqua refrigerante, quindi varia poco lungo *x*. Questo giustifica l'assunzione di temperatura di parete uniforme utilizzata per calcolare h_o.

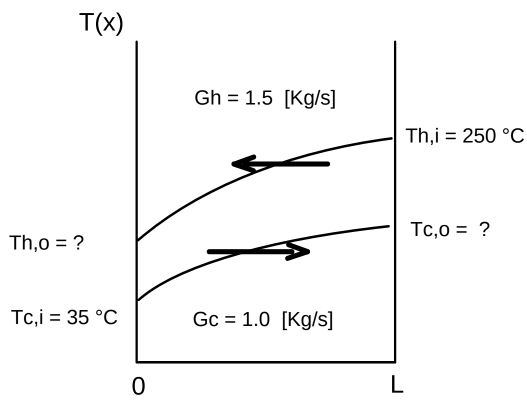
***Esercizio* 3 (analisi)**

Una portata G_h= 1.5 [kg/s] di gas entra in uno scambiatore a correnti incrociate alla temperatura di 250 °C e viene raffreddato da una portata G_c= 1.0 [kg/s] di acqua in pressione alla temperatura d'ingresso di 35 °C.

L'area della superficie (alettata) di scambio lato gas è pari a A_h = 40 [m^2] mentre il coefficiente globale di scambio sempre lato gas vale U_h= 100 [W/m^{2}K]. Determinare la potenza termica ceduta dal gas e le temperature di uscita del gas e dell'acqua. Si assumano inoltre le seguenti proprietà:

Acqua: $c_{p,c}$=4197 [J/kg K] **Gas**: $c_{p,h}$= 1000 [J/kg K]





Si userà il metodo NTU.

$$C_c = G_c \cdot c_{p,c} = 1.0[kg/s] \cdot 4197[J/kgK] = 4197\ [W/K]$$

$$C_h = G_h \cdot c_{p,h} = 1.5[kg/s] \cdot 1000[J/kgK] = 1500\ [W/K] = \mathbf{C_{min}}$$

Nel nostro caso C_{min}/C_{max}= 1500/4197= 0.357

mentre $$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{100[W/m^2K] \cdot 40[m^2]}{1500[W/K]} = 2.67$$

Dall'opportuna figura per l'efficienza dello scambiatore si ricava $\varepsilon \approx 0.82$

ed utilizzando l'eq. (17)

$$q = \varepsilon\, C_{min}(\, T_{h,i} - T_{c,i}\,)$$

otteniamo

$$q = 0.82\ 1500 \cdot (\ 250 - 35\ ) = 2.65 \cdot 10^5\ [W]$$

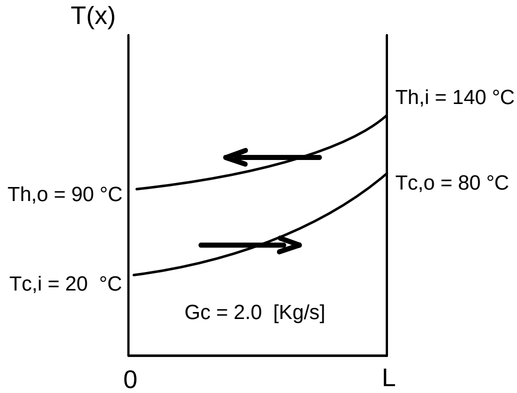
sarà allora:

$$T_{c,o} = T_{c,i} + \frac{q}{G_c \cdot c_{p,c}} = 35 + \frac{2.65 \cdot 10^5}{1 \cdot 4197} = \mathbf{98.1}\ [°C]$$

$$T_{h,o} = T_{h,i} - \frac{q}{G_h \cdot c_{p,h}} = 250 - \frac{2.65 \cdot 10^5}{1.5 \cdot 1000} = \mathbf{73.3}\ [°C]$$

***Esercizio* 4**
Uno scambiatore di calore, a due passaggi lato mantello e a quattro passaggi lato tubi, viene utilizzato per scaldare dell'acqua mediante olio. L'acqua (G_{H2O} = 2 [kg/s]) entra nei tubi alla temperatura $T_{c,i}$ = 20 °C ed esce a $T_{c,o}$= 80 [°C]. L'olio entra nel mantello alla temperatura $T_{h,i}$ = 140 [°C] ed esce a $T_{h,o}$ = 90 °C . Calcolare l'area di scambio esterna richiesta se il coefficiente globale esterno di scambio vale U_e= 300 [W/m^{2}K].

Si tratta di uno scambiatore a passaggi multipli per cui **la *MLTD* deve essere corretta**.



$$MLTD = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_L}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}} = \frac{70-60}{\ln(7/6)} = 64.9[K]$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$P = \frac{T_{t,o} - T_{t,i}}{T_{M,i} - T_{t,i}} = \frac{80-20}{140-20} = 0.5\ ; \qquad R = \frac{T_{M,i} - T_{M,o}}{T_{t,o} - T_{t,i}} = \frac{140-90}{80-20} = 0.83$$

Dall'opportuno grafico si ricava **F= 0.96-0.97** per cui

$$\Delta T_m = 0.97 \cdot 64.9 = 62.95[K]$$

Dall'equazione calorimetrica ho allora ($c_{p,c}$(323 K)= 4181 [J/kgK]):

$$q = G_c \cdot c_{p,c} \cdot (T_{c,o} - T_{c,i})$$

$$= 2 \cdot 4181 \cdot (80-20) = 501.7\ [kW]$$

per ricavare la superficie useremo la relazione di Newton

$$q = U_e \cdot A_e \cdot \Delta T_m$$

per cui

$$A_e = \frac{q}{U_e \cdot \Delta T_m} = \frac{501.7 \cdot 10^3 [W]}{300[W/m^2K] \cdot 62.95[K]} = 26.57[m^2]$$

Esercitazioni con richiami teorici

4

Conduzione termica nelle alette

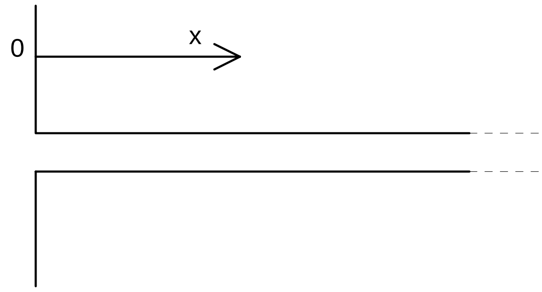
richiami

Eq. aletta

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

con $\theta = T(x) - T_\infty$ $\qquad m^2 = \frac{hp}{kA}$

1° caso: aletta infinitamente lunga



condizioni al contorno - x=0 $\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$

- x=∞ $\theta = 0$

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

per la seconda condizione $c_1=0$
per la prima $c_2=\theta_0$

$$\theta = \theta_0 e^{-mx}$$

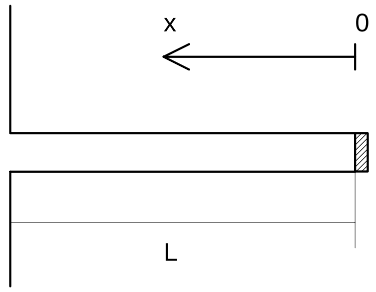
flusso complessivamente scambiato:

$$q = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA\theta_0(-m)\left[e^{-mx}\right]_{x=0} = kA\theta_0 m = \theta_0\sqrt{hpkA}$$

oppure

$$q = \int_0^\infty h\theta p dx = \int_0^\infty hp\theta_0 e^{-mx} dx = hp\theta_0\left[-\frac{1}{m}e^{-mx}\right]_0^\infty = \frac{hp}{m}\theta_0 = \theta_0\sqrt{hpkA}$$

2° caso: lunghezza finita, condizione adiabatica all'estremità



condizioni al contorno - x=0 $\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = 0$

- x= L $\theta = \theta_0$

$$\theta = c_1 \cosh(mx) + c_2 \sinh(mx)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = c_1 m \sinh(mx) + c_2 m \cosh(mx)$$

dove

$$\cosh(mx) = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \qquad \sinh(mx) = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

per la prima condizione $c_2=0$

per la prima $\theta_0 = c_1 \cosh(mL)$ $c_1 = \frac{\theta_0}{\cosh(mL)}$

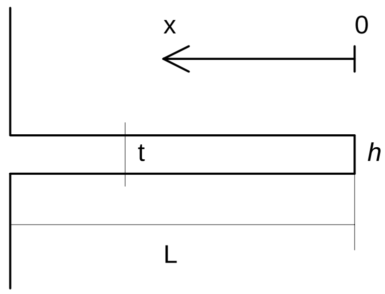
quindi

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mL)}$$

flusso complessivamente scambiato:

$$q = -\left(-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}\right) = kA\theta_0 m \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} = \theta_0 \sqrt{hpkA}\,\tanh(mL)$$

3° caso: lunghezza finita, coeff. di scambio *h* all'estremità



condizioni al contorno - x=0 $-\left(-kA\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}\right)=hA\theta(0)$

- x= L $\theta=\theta_0$ (da non confondere con $\theta(0)$)

$$\theta=c_1\cosh(mx)+c_2\sinh(mx)$$

$$\theta(0)=c_1$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=c_1 m\sinh(0)+c_2 m\cosh(0)=c_2 m$$

prima condizione: $kAc_2 m=hAc_1$ $c_2=c_1\frac{h}{km}$

quindi

$$\theta=c_1\cosh(mx)+c_1\frac{h}{km}\sinh(mx)$$

applicando la condizione in L ottengo

$$\theta_0=c_1\cosh(mL)+c_1\frac{h}{km}\sinh(mL)$$

$$c_1=\frac{\theta_0}{\cosh(mL)+\frac{h}{km}\sinh(mL)}$$

e

$$c_2=\frac{\theta_0\frac{h}{km}}{\cosh(mL)+\frac{h}{km}\sinh(mL)}$$

in definitiva

$$\theta=\theta_0\frac{\cosh(mx)+\frac{h}{km}\sinh(mx)}{\cosh(mL)+\frac{h}{km}\sinh(mL)}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\theta_0 m\frac{\sinh(mx)+\frac{h}{km}\cosh(mx)}{\cosh(mL)+\frac{h}{km}\sinh(mL)}$$

flusso complessivamente scambiato:

$$q = -\left(-kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} \right) = kA\theta_0 m \frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km}\sinh(mL)} = \sqrt{hpkA}\,\frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km}\sinh(mL)}$$

invece di usare questa espressione si ottiene una approssimazione accettabile usando l'espressione vista in precedenza per aletta adiabatica all'estremità ma aumentando la lunghezza di metà dello spessore:

$L_c = L + t/2$ $\qquad q = \theta_0 \sqrt{hpkA}\,\tanh(mL_c)$

risultati accurati se $\frac{ht}{k} < .06$

Efficacia di aletta (effectiveness)

rapporto fra flusso termico asportato dall'aletta e flusso che sarebbe scambiato in assenza di aletta

$$\varepsilon = \frac{q}{hA\theta_0} \quad \text{A area della sezione}$$

Nel caso di aletta infinitamente lunga, ad esempio, si ha

$$\varepsilon = \frac{\theta_0\sqrt{hpkA}}{hA\theta_0} = \sqrt{\frac{kp}{hA}}$$

l'aletta non è giustificata se $\varepsilon < 2$.

Es. consideriamo l'aletta con estremità isolata, si ha:

$$\varepsilon = \frac{\theta_0\sqrt{hpkA}\tanh(mL)}{hA\theta_0} = \sqrt{\frac{kp}{hA}}\tanh(mL)$$

siccome per mL=2.3 abbiamo tanh(mL)= 0.98 non ha molto senso estendere la lunghezza oltre

$$L = 2.3/m$$

Efficienza di aletta (efficiency)
più corretta da un punto di vista termodinamico.

rapporto fra flusso termico asportato dall'aletta e flusso che sarebbe scambiato se l'intera aletta si trovasse alla temperatura uniforme della base

$$\eta = \frac{q}{hA_{\text{aletta}}\theta_0}$$

per una aletta a sezione costante isolata all'estremità abbiamo

$$\eta = \frac{\theta_0 \sqrt{hpkA}\tanh(mL)}{hpL\theta_0} = \frac{\tanh(mL)}{L\sqrt{\dfrac{h^2 p^2}{hpkA}}} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

$$\lim_{mL\to 0} \frac{\tanh(mL)}{mL} = \lim_{mL\to 0} \frac{1}{\cosh^2(mL)} = 1$$

$$\lim_{mL\to \infty} \frac{\tanh(mL)}{mL} = 0$$

per questo tipo di aletta, quindi, alette corte sono ben sfruttate (efficienza) ma hanno scarsi effetti (efficacia).

Se l'aletta non è isolata all'estremità si usa l'espressione approssimata

$$\eta = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$$

si noti che per alette molto larghe (larghezza w) rispetto allo spessore t si ha

$$p \cong 2w \qquad\qquad A = wt$$

$$mL_c = \sqrt{\frac{hp}{kA}}L_c = \sqrt{\frac{2h}{kt}}L_c$$

e chiamando A_p l'area della sezione longitudinale dell'aletta

$$A_p = L_c t$$

abbiamo:

$$mL_c == \sqrt{\frac{2hL_c}{k A_p}}L_c = \left(\frac{2h}{k A_p}\right)^{1/2} (L_c)^{3/2}$$

ecco perché l'efficienza di aletta si trova spesso espressa in funzione del gruppo sopradescritto.

I grafici di h servono a calcolare il flusso asportato e disperso mediante la

$$q = \eta = hA_{\text{aletta}}\theta_0$$

dove l'area complessiva vale

al. rettangolare	$A_{\text{aletta}} = 2wL_c$
al. triangolare	$A_{\text{aletta}} = 2w\left[L^2 + (t/2)^2\right]^{1/2}$
al. parabolica	$A_{\text{aletta}} = 2.05w\left[L^2 + (t/2)^2\right]^{1/2}$
al. a disco	$A_{\text{aletta}} = 2r(r_2^2 - r_1^2)$

Efficienza globale di alettatura

si riferisce ad un array di alette e l'area di scambio è quella totale, compresa la parte non alettata.

$$\eta_{tot} = \frac{q_{tot}}{hA_{tot}\theta_0}$$

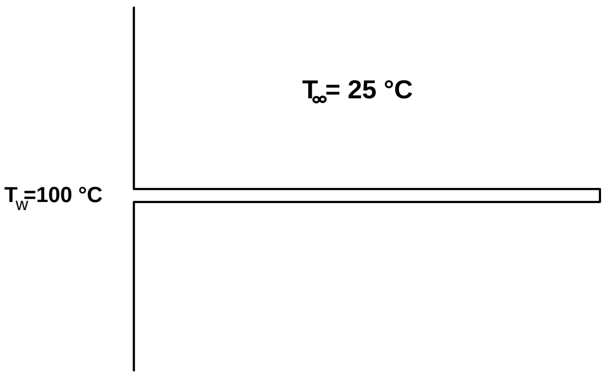
$$A_{tot} = A_{base\ non\ alettata} + A_{alette}$$
$$q_{tot} = h\theta_0 A_{base\ non\ alettata} + \eta_{aletta}\, h\theta_0 A_{alette}$$
$$\eta_{tot} A_{tot} = \frac{q_{tot}}{h\theta_0} = A_{base\ non\ alettata} + \eta_{aletta} A_{alette}$$
$$\eta_{tot} = \frac{A_{base\ non\ alettata} + \eta_{aletta} A_{alette}}{A_{tot}} = \frac{(A_{tot} - A_{alette}) + \eta_{aletta} A_{alette}}{A_{tot}}$$

$$\eta_{tot} = 1 - \frac{A_{alette}}{A_{tot}}(1 - \eta_{aletta})$$

Applicazioni

***Esercizio* 1**

Un filo molto lungo del diametro di 25 mm ha una estremità libera e l'altra mantenuta alla temperatura di 100 °C. La superficie del filo è esposta all'aria ambiente (25 °C) ed il coefficiente di scambio termico convettivo vale 10 [W/m^{2}K].
- Valutare il flusso termico disperso dal filo verso l'ambiente nel caso in cui il materiale impiegato sia: 1) rame puro, 2) acciaio inox AISI 316.
- Stimare quanto debba essere lungo il filo per poter essere considerato *infinitamente lungo* secondo la trattazione delle superfici estese.



Proprietà termofisiche
$T_m=(T_w+T_\infty)/2$= 62.5 °C ≈ 335 K

Rame : k= 398 [W/mK]

SS AISI 316 : k= 14 [W/mK]

Ipotesi:
- regime stazionario
- conduzione monodimensionale
- irraggiamento trascurabile
- h uniforme e costante
- filo infinitamente lungo

$$q = \theta_0 \sqrt{kAhp} \qquad \theta_0 = 100\text{- }25 = 75 \text{ K}$$

$A = \pi(25 \cdot 10^{-3})^2/4 = 0.000491$ [m^2]

$p = \pi(25 \cdot 10^{-3}) = .0785$ [m]

$$\text{Per il rame:} \quad q = 75\sqrt{398 \cdot 4.91 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 0.0785} = 29.37[W]$$

$$\text{Per l' acciaio:} \quad q = 75\sqrt{14 \cdot 4.91 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 0.0785} = 5.5[W]$$

Poiché il flusso termico scambiato all'estremità di un filo molto (infinitamente) lungo è nullo, sarà sufficiente confrontare l'espressione del flusso termico scambiato da una aletta di lunghezza finita, adiabatica all'estremità, con quella (già vista) relativa ad un'aletta di lunghezza infinita.

$$q = \theta_0 \sqrt{kAhp} \cdot \tanh(mL) \qquad m = \sqrt{\frac{hp}{kA}}$$

$$q = \theta_0 \sqrt{kAhp}$$

Quando $\tanh(mL) = 0.99$ le due espressioni vengono considerate sufficientemente simili e si può assumere che il filo sia sufficientemente lungo:

$$\tanh(mL) = 0.99 \text{ quando } mL = 2.65$$

la condizione è quindi:

$$L \geq L_\infty = \frac{2.65}{m} = 2.65\sqrt{\frac{kA}{hp}}$$

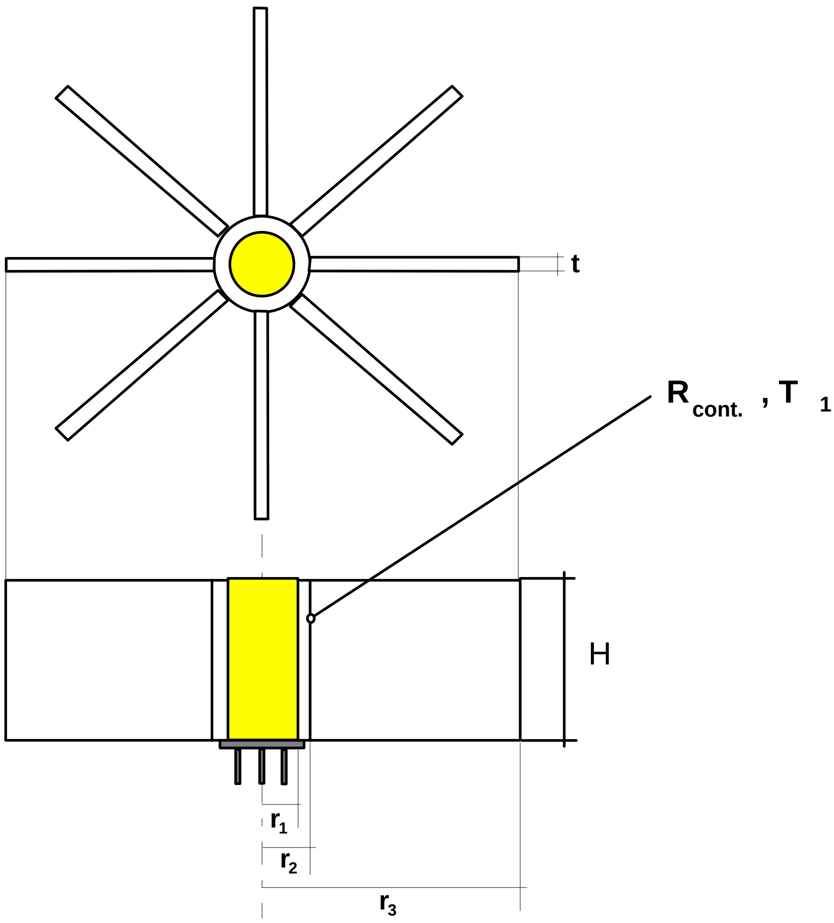
$$\text{Per il rame} \qquad L_\infty = 2.65\sqrt{\frac{398 \cdot 4.91 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 0.0785}} \cong 1.32[m]$$

$$\text{Per l' acciaio} \qquad L_\infty = 2.65\sqrt{\frac{14 \cdot 4.91 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 0.0785}} \cong 0.25[m]$$

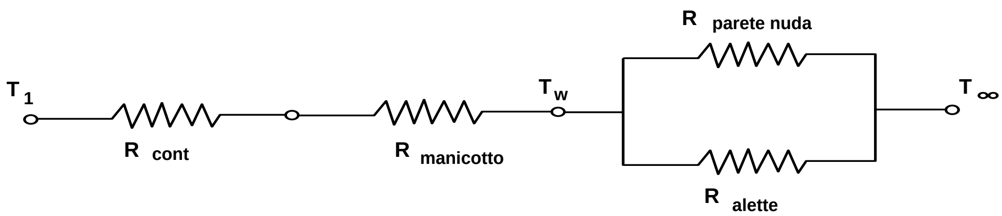
Nota: i precedenti risultati suggeriscono che se $mL \geq 2.65$ il flusso termico scambiato può essere valutato con l'approssimazione della aletta infinitamente lunga. Tuttavia occorre un valore $\boldsymbol{mL \gg 2.65}$ se la suddetta approssimazione la si vuole usare per valutare la distribuzione di temperatura.

***Esercizio* 2**

Lo scambio termico di un transistor può essere incrementato mettendolo in un manicotto di alluminio (k= 200 [W/mK]) con, ad esempio, dodici alette longitudinali (in figura sono 8) lavorate di pezzo sulla superficie esterna. Il raggio del transistor sia r_1= 2 [mm], l'altezza H= 6 [mm], mentre le alette sono lunghe $L = r_3 - r_2$= 10 [mm], lo spessore uniforme è t= 0.7 [mm]. Lo spessore della base del manicotto vale $r_2 - r_1$= 1 [mm] e la resistenza di contatto all'interfaccia manicotto transistor è $R''_{cont} = 10^{-3}$ [m^{2}K/W]. All'esterno vi è aria a T_∞ = 20 °C ed il coefficiente di scambio termico convettivo vale h= 25 [W/m^{2}K].



Nell'ipotesi di flusso termico monodimensionale radiale, rappresentare il circuito equivalente termico dalla superficie del transistor all'aria.
Valutare le singole resistenze termiche del circuito e calcolare il flusso termico dissipato nell'aria se la temperatura superficiale del transistor vale T_1= 80 °C.
Nell'ipotesi che possa essere considerata circa uniforme la temperatura in r_2 (ovvero poca differenza fra T alla base dell'aletta e T della parete nuda, il circuito equivalente è il seguente:



IL circuito tiene conto della resistenza di contatto, della conduzione nel manicotto, della convezione con superficie nuda , della conduzione-convezione delle alette.

$$R_{cont} = \frac{R''_{cont}}{2\pi r_1 H} = \frac{10^{-3}\left[m^2K/W\right]}{2\pi\cdot 0.002\cdot 0.006\left[m^2\right]} = 13.3\left[K/W\right]$$

$$R_{manic.} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k H} = \frac{\ln(3/2)}{2\pi\cdot 200\cdot 0.006\left[m^2\right]} = 0.054\left[K/W\right]$$

Calcoliamo ora la resistenza termica di una singola aletta. Sappiamo che:

$$q = \theta_0 \sqrt{hpkA}\,\frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\operatorname{senh}(mL)} \qquad m = \sqrt{\frac{hp}{kA}}$$

ovviamente varrà

$$R_{\text{singola aletta}} = \frac{\theta_0}{q}$$

$$p = 2 \cdot (H + t) = 13.4\,[mm] = 0.0134[m]$$

$$A = t \cdot H = 4.2\left[mm^2\right] = 4.2 \cdot 10^{-6}\left[m^2\right]$$

$$m = \sqrt{\frac{25 \cdot 0.0134}{200 \cdot 4.2 \cdot 10^{-6}}} = 20\left[m^{-1}\right]$$

$$mL = 20 \cdot 0.01 = 2$$

$$\frac{h}{mk} = \frac{25}{20 \cdot 200} = 0.00625$$

$$\sqrt{hpkA} = \sqrt{25 \cdot 0.0134 \cdot 200 \cdot 4.2 \cdot 10^{-6}} = 0.0168[W/K]$$

$$R_{1\text{ aletta}} = \frac{1.02 + 0.00625 \cdot 0.201}{0.0168 \cdot (0.201 + 0.00625 \cdot 1.02)} = 293[W/k]$$

Per le 12 alette identiche sarà allora

$$R_{12\text{ alette}} = \frac{R_{1\text{ aletta}}}{12} = 24.4[W/k]$$

Per la superficie nuda (non interessata dalle alette) sarà:

$$R_{\text{parete nuda}} = \frac{1}{h \cdot (2\pi r_2 - 12t) \cdot H} = \frac{1}{25 \cdot (2\pi \cdot 0.003 - 12 \cdot 0.0007) \cdot 0.006} = 638[W/K]$$

Facendo il parallelo con la resistenza delle alette otteniamo:

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_{12\text{ alette}} + 1/R_{\text{p. nuda}}} = 23.5[k/W]$$

ed infine la resistenza totale sarà:

$$R_{\text{tot}} = 13.3 + 0.054 + 23.5 = 36.9[K/W]$$

$$q = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{\text{tot}}} = \frac{80 - 20}{36.9} = 1.63[W]$$

<u>Commenti:</u>

La resistenza termica conduttiva del manicotto è trascurabile, ma la resistenza termica di contatto è significativa in relazione a quella della superficie alettata.
In assenza di alette la resistenza convettiva della superficie esterna del manicotto vale:

$$R_{\text{senza alette}} = \frac{1}{h \cdot (2\pi r_2) \cdot H} = \frac{1}{25 \cdot (2\pi \cdot 0.003) \cdot 0.006} = 353.7[W/K]$$

$$R_{\text{tot}} = 13.3 + 0.054 + 353.7 = 367.1[K/W]$$

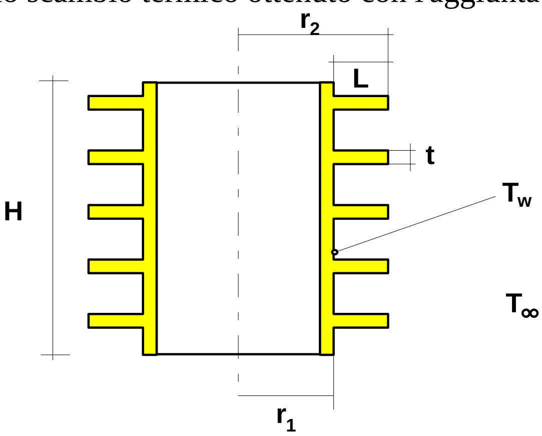
A parità di potenza termica generata dal dispositivo la superficie del transistor raggiungerebbe una temperatura pari a:

$$T_1 = T_\infty + q \cdot R_{\text{tot}} = 20 + 1.63 \cdot 367.1 = 618.4[°C]$$

con conseguente rottura.(già oltre i 180-200 °C la funzionalità è compromessa).

***Esercizio* 3**

Il cilindro di una motocicletta è costruito con una lega 2024-T6 di alluminio ed ha una altezza di H= 0.15 m ed il diametro esterno D = 50 mm (= $2r_1$). Nelle condizioni tipiche di esercizio la superficie esterna del cilindro si trova ad una temperatura di 500 K (T_w) ed è esposta ad aria ambiente a 300 K (T_∞) con un coefficiente di scambio convettivo h= 50 [W/m^{2}K]. Per aumentare il flusso termico dissipato vengono aggiunte 5 alette equispaziate anulari a sezione rettangolare, spesse ciascuna 6 mm (t) e lunghe 20 mm (L). Quale è l'aumento dello scambio termico ottenuto con l'aggiunta delle alette ?



Dati

H=0.150 r_1= 0.025 r_2= 0.045 **[m]**

t = 0.006 L= 0.020 **[m]**

T_w= 500 T_∞ = 300 **[K]**

h= 50 [W/m^{2}K]

Ipotesi

- regime stazionario
- conduzione radiale monodimensionale
- proprietà termofisiche costanti
- irraggiamento all'esterno trascurabile
- convezione uniforme su tutta la superficie (con o senza alette)

Per la lega di alluminio 2024-T6 per T≈400 si ha k=186 [W/mK].

$$q_{\text{alette}} = N_{\text{alette}} \cdot q_{\substack{\max \\ \text{1 aletta}}} \cdot \eta_{\text{aletta}}$$

Facciamo riferimento al grafico 3.19.

$$r_{2c} = r_2 + t/2 = 0.045 + 0.003 = 0.048[m]$$

$$L_c = L + t/2 = 0.020 + 0.003 = 0.023[m]$$

$$q_{\substack{\max \\ \text{1 aletta}}} = 2\pi(r_{2\,c}^2 - r_1^2) \cdot h \cdot (T_w - T_\infty) = 105.5[W]$$

il fattore η_{aletta} si ottiene dal grafico dopo aver calcolato alcune quantità.

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{0.048}{0.025} = 1.92$$

$$A_p = L_c \cdot t = 1.38 \cdot 10^{-4}; L_c^{3/2} \cdot \left(\frac{h}{kA_p}\right)^{1/2} = (0.023)^{3/2} \cdot \left(\frac{50}{186 \cdot 1.38 \cdot 10^{-4}}\right)^{1/2} = 0.154$$

e quindi dalla figura si ricava η_{aletta} = 0.95 da cui:

$$q_{\text{alette}} = 5 \cdot 105.5 \cdot 0.95 = 501.1[W]$$

$$q_{\text{base nuda}} = h \cdot A_{\text{base n.}} \cdot (T_w - T_\infty)$$

$$A_{\text{base n.}} = 2\pi r_1 (H - N \cdot t) = 2\pi \cdot 0.025 \cdot (0.15 - 5 \cdot 0.006) = 1.885 \cdot 10^{-2}\left[m^2\right]$$

$$q_{\text{base nuda}} = 50 \cdot 0.01885 \cdot (200) = 188.5[W]$$
$$q_{\text{tot}} = 501.1 + 188.5 = 689.6[W]$$

In assenza di alette il flusso termico varrebbe:

$$q = h \cdot 2\pi r_1 \cdot H \cdot (T_w - T_\infty) = 50 \cdot 2\pi \cdot 0.025 \cdot 0.15 \cdot (200) = 235.6[W]$$

Commenti: sebbene questo tipo di alettatura incrementi in maniera significativa lo scambio termico del cilindro, un ulteriore aumento potrebbe essere ottenuto aumentando il numero delle alette (riducendo sia *t* che lo spazio fra di esse).

Esercitazioni con richiami teorici

5

Irraggiamento

L'irraggiamento è il processo mediante cui il calore fluisce da un corpo a temperatura maggiore verso uno a temperatura minore quando i corpi non sono a contatto, anche se fra essi c'è il vuoto. Il processo avviene se il mezzo interposto è trasparente ed il processo è regolato dalla teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche.
L'energia raggiante viaggia dunque alla velocità della luce. Per lo scambio termico sono importanti le lunghezze d'onda comprese fra 0.1 e 100 μm approssimativamente.

corpo nero

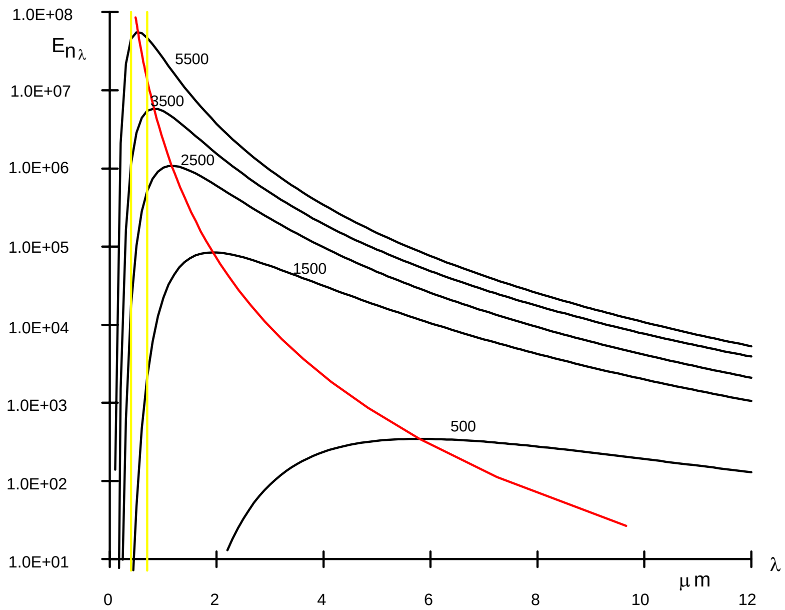
Un corpo nero è un corpo che ad ogni temperatura e lunghezza d'onda assorbe tutta la radiazione incidente ed emette la maggiore quantità possibile di energia (compatibilmente con la seconda legge della termodinamica). Il corpo nero rappresenta il termine di paragone delle caratteristiche di irraggiamento degli altri corpi. Sebbene sia una idealizzazione, in laboratorio può essere approssimato mediante una piccola cavità.
L'energia emessa da un corpo nero per unità di tempo e superficie alla lunghezza d'onda λ nell'intervallo *d*λ si indica con

$$E_{n\lambda}\, d\lambda$$

$E_{n\lambda}$ è detto *potere emissivo monocromatico di corpo nero* e dipende da λ e dalla temperatura secondo la seguente legge (di Planck):

$$E_{n\lambda}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5\left(e^{c_2/\lambda T} - 1\right)} \qquad \left[W/m^3\right] \tag{1}$$

tale funzione ha l'andamento di figura.



Potere emissivo monocromatico di corpo nero per alcune temperature

Si può notare che la frazione di energia emessa nel visibile (compresa fra circa 0.4 e 0.7 μm) aumenta all'aumentare di *T*. La frequenza del massimo aumenta all'aumentare di *T* secondo la relazione:

$$\lambda_{max} = 2898/T$$

La radiazione termica complessivamente emessa da un corpo nero per unità di superficie ad una data temperatura si ottiene integrando la (1) su tutte le lunghezze d'onda:

$$E_n(T) = \int_0^\infty E_{n\lambda}(T)d\lambda \qquad (2)$$

integrazione che conduce alla legge di Stefan-Boltzman

$$E_n(T) = \sigma T^4 \qquad (3)$$

con σ= 5.67 10^{-8} [W/m^2K^4] , costante di Boltzman.

emittenza emisferica monocromatica e totale

Le superfici reali non sono corpi neri nel senso che il loro spettro di emissione non è quello di un corpo nero. Per caratterizzare tali superfici si usano grandezze quali l'emissività ed il coeff. di assorbimento.
Se con E_λ si indica il potere emissivo monocromatico di una superficie reale allora l'emissività (detta anche emittenza) emisferica monocromatica è definita come:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{n\lambda}}, \qquad \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)$$

ovvero ε_λ (<1) è la frazione di radiazione di corpo nero emessa dalla superficie alla lunghezza d'onda λ (ad una certa temperatura *T*). Parimenti il coeff. di assorbimento α_λ è definito come la frazione di dell'energia raggiante monocromatica, incidente su una superficie, che viene assorbita rispetto a quella assorbita da un corpo nero (ovvero rispetto a tutta quella incidente).
La legge di Kirchhoff stabilisce che per una qualsiasi superficie $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$
L'emittenza totale è definita come:

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda,T)E_{n\lambda}(\lambda,T)d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda,T)d\lambda} \qquad (4)$$

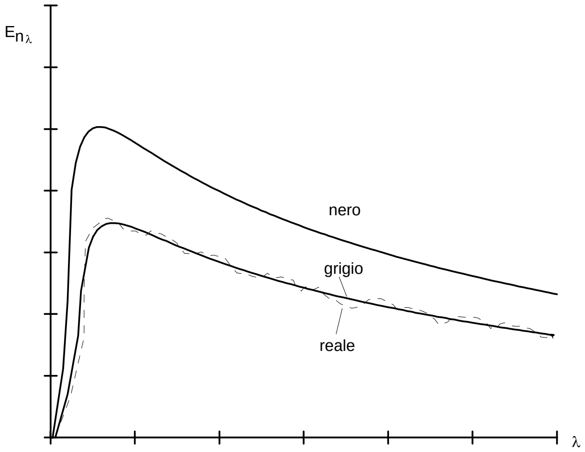
si nota come anche quando ε_λ non dipende da *T* ε dipende da *T*.
nel caso in cui ε_λ non dipende da λ allora $\varepsilon(T)= \varepsilon_\lambda(T)$ (vedi eq.4) ed il corpo in questione è detto *grigio*., se inoltre non vi è dipendenza dalla temperatura allora $\varepsilon=\varepsilon_\lambda$ = costante e siamo in presenza di un caso ancora più semplice.

irraggiamento superfici reali

Per un corpo grigio quindi (emissività costante in tutto il campo di lunghezze d'onda ad una data temperatura) si avrà:

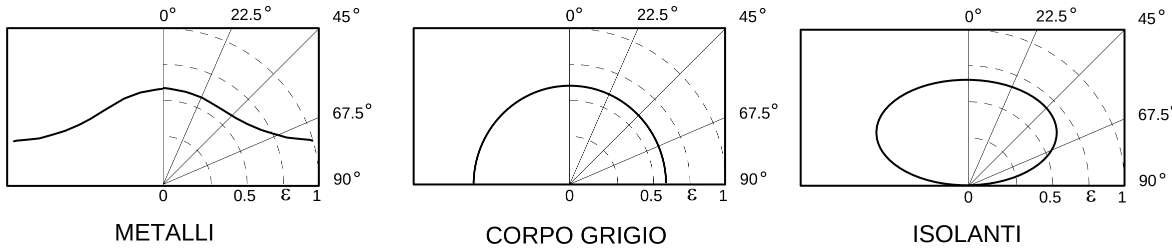
$$E_g = \varepsilon_g(T)E_n(T) = \varepsilon_g(T)\sigma\, T^4$$

e lo spettro di emissione sarà simile a quello di un corpo nero alla stessa temperatura ma ridotto di un fattore ε_g .
Le superfici reali non sono corpi grigi perfetti ma per molti problemi di scambio termico possono essere considerati tali.



Solitamente l'emittenza monocromatica di un conduttore elettrico diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda e di conseguenza l'emittenza totale aumenta all'aumentare della temperatura. I materiali non conduttori hanno generalmente un comportamento opposto.
Nei calcoli di scambio termico si utilizza una emittenza media, nell'intervallo di lunghezze d'onda che interessano il fenomeno in esame.

Nei corpi reali l'emittenza ha caratteristiche direzionali, ovvero dipende d'angolo fra normale alla superficie e energia emessa come dalla seguente figura



Solo i corpi neri (ed i grigi ideali) sono caratterizzati da radiazione perfettamente diffusa e l'emissività non dipende quindi dall'angolo.

<u>coefficiente di riflessione e trasmissione</u>

Indichiamo con G_λ l'energia raggiante monocromatica incidente su una superficie (per unità di area, lunghezza d'onda e tempo). Quando una superficie non assorbe tutta la radiazione incidente su essa, la parte non assorbita sarà trasmessa e/o riflessa.

coeff. di riflessione monocromatica

$$\rho_\lambda = \frac{\text{energia raggiante riflessa} \;/\; \text{tempo} \cdot \text{area} \cdot \text{lungh. d' onda}}{G_\lambda}$$

coeff. di riflessione totale

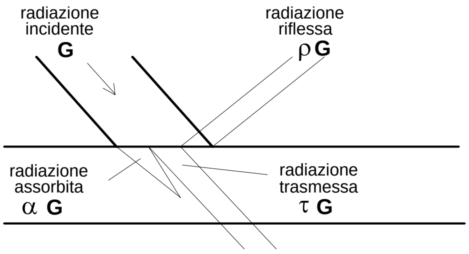
$$\rho = \frac{\text{energia raggiante riflessa / tempo} \cdot \text{area}}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}$$

Analogamente si definiscono i coeff. monocromatico e totale di trasmissione τ_λ e τ .
Sarà ovviamente:

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

per materiali opachi sarà τ_λ, τ =0.



Si distinguono due tipi fondamentali di riflessione: speculare e diffusa. Nessuna superficie reale è completamente speculare o diffusa, in ogni caso le caratteristiche di riflessione dipendono da λ : uno specchio è ovviamente speculare nel visibile ma non lo è in genere nel campo delle radiazioni infrarosse.
Per calcoli ingegneristici le superfici lavorate o verniciate possono essere trattate come perfettamente diffuse.

<u>Fattori di vista</u>
Nel calcolo dello scambio termico per irraggiamento è di interesse fondamentale la determinazione della frazione di energia raggiante che, lasciata complessivamente una superficie, viene intercettata da un'altra sup. e viceversa.
La frazione di energia raggiante diffusa che, proveniente dalla generica sup. nera A_i, raggiunge A_j è chiamata fattore di vista o fattore di forma $F_{i\text{-}j}$.
Consideriamo due superfici nere A_1 e A_2. La radiazione che, lasciata A_1, arriva su A_2 è data da

$$q_{1\to2} = E_{n\,1} \cdot A_1 \cdot F_{1-2}$$

quella che, lasciata A_2 arriva su A_1 è

$$q_{2\to1} = E_{n\,2} \cdot A_2 \cdot F_{2-1}$$

Siccome le superfici sono nere, tutta la radiazione incidente sarà assorbita e la potenza termica netta scambiata fra le due superfici sarà:

$$q_{1\leftrightarrow2} = E_{n\,1} \cdot A_1 \cdot F_{1-2} - E_{n\,2} \cdot A_2 \cdot F_{2-1}$$

Se le superfici sono alla stessa temperatura dovrà essere

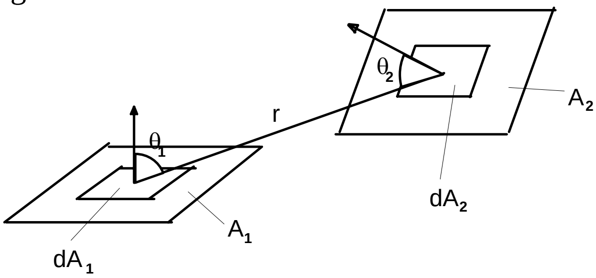
1) $E_{n\,1} = E_{n\,2}$
2) $q_{1\text{-}2} = 0$ da cui $A_1 \cdot F_{1-2} = A_2 \cdot F_{2-1}$

siccome poi tale relazione coinvolge fattori esclusivamente geometrici e non dipendenti dalla temperatura, essa dovrà essere valida **sempre**. Quindi, in generale

$$q_{1\leftrightarrow 2} = A_1 \cdot F_{1-2}\left[E_{n\,1} - E_{n\,2}\right] = A_2 \cdot F_{2-1}\left[E_{n\,1} - E_{n\,2}\right]$$

Si farà uso della formula dove risulta più facile calcolare il fattore di vista F. Ad esempio, se A_1 è contenuta in A_2 (e non vede se stessa) allora tutta l'energia proveniente da A_1 è intercettata da A_2 , di conseguenza F_{1-2}=1

L'equazione appena scritta per la potenza netta scambiata mette in evidenza la possibilità di analogia con le reti elettriche: $E_{n\,1}$,$E_{n\,2}$ potenziali, A_1F_{1-2} conduttanza (1/R).
Consideriamo ora due sup. generiche



L'espressione per la potenza scambiata sarà:

$$q_{1\leftrightarrow 2} = (E_{n1} - E_{n2}) \int_{A_1}\int_{A_2} \frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

l'integrale doppio rappresenta quindi A_1F_{1-2} o A_2F_{2-1} . Essendo così laboriosa la determinazione dei fattori di vista, si utilizzano delle tabelle.
Se le superfici in questione non sono nere bensì grigie le cose si complicano ulteriormente. In generale comunque si farà ricorso ad una espressione del tipo:

$$q_{1\leftrightarrow 2} = A_1 \cdot \mathcal{F}_{1-2} \cdot (E_{n\,1} - E_{n\,2})$$

σ= 5.67·10^{-8} [W/m^{2}K^4] costante di Stefan-Boltzman
$\mathcal{F}_{1\leftrightarrow 2}$ fattore funzione della geometria e dell'emissività ε dei due corpi
ε- emissività

ed essendo $E_n = \sigma T^4$

otteniamo $q_{1\leftrightarrow 2} = \sigma \cdot A_1 \cdot \mathcal{F}_{1-2} \cdot (T_1^4 - T_2^4)$

Per due superfici che scambiano energia fra loro ma non ricevono energia da nessun'altra superficie si ha:

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{A_1}{A_2}\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

Questa espressione è molto utile . Ad esempio, nel caso di un piccolo corpo (concavo, ovvero che non vede se stesso) con emissività ε_1 racchiuso in una cavità avremo
1) F_{1-2}=1
2)$A_2 >> A_1$
quindi:

$$\mathcal{F}_{1-2} = \varepsilon_1$$

Per due cilindri concentrici indefiniti o due sfere concentriche (F_{1-2}=1)

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

dove il pedice (1) si riferisce alla sup interna.

Per due piastre parallele indefinite($F_{1\text{-}2}$=1; A_1=A_2):

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

applicazioni

***Esercizio* 1**

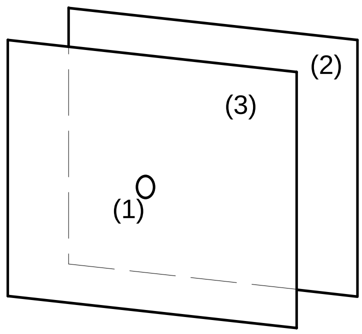
Per la misura di temperature elevate (T > 1000-1200 K) viene spesso utilizzato uno strumento detto pirometro che misura l'intensità di radiazione proveniente dalla superficie del corpo investigato nota la sua emissività. In pratica, semplificando un po', è come se misurassero E_λ, si potrà poi risalire alla temperatura invertendo la relazione:

$$S = k \cdot E_\lambda(T) = \frac{c_1}{\varepsilon_\lambda \lambda^5\left(e^{c_2/\lambda T} - 1\right)}$$

La taratura di questi strumenti viene effettuata mediante l'uso di corpi neri e siccome un corpo nero non esiste si ricorre a piccole cavità.

In laboratorio si fa uso di due grandi piastre parallele affacciate in una delle quali è praticato un piccolo foro. Si analizzi la prestazione del sistema come surrogato di corpo nero al variare dell'emissività e della temperatura delle 2 lastre. Si assuma in generale che tali quantità siano diverse per le due lastre.

Caratteristiche della radiazione emessa da un piccolo foro: lastre parallele infinite



Dobbiamo trovare una espressione per G_1.
Dall'interno il foro è assimilabile ad una parete nera a $T_1 = T_{amb}$. Per i fattori di vista si nota:

$$F_{i\text{-}i} = F_{3\text{-}1} = F_{1\text{-}3} = 0$$

$\varepsilon_1 = 1$ (corpo nero a T_{amb} se visto dall'interno)

$J_i = (1-\varepsilon_1)G_i + \varepsilon_i E_{ni}$

$J_1 = E_{n1}$
$J_2 = (1-\varepsilon_2)G_2 - \varepsilon_2 E_{n2}$
$J_3 = (1-\varepsilon 3)G_3 - \varepsilon_3 E_{n3}$

$G_i = \sum_j J_j F_{i-j}$
$G_1 = J_2 F_{1\text{-}2}$
$G_2 = J_1 F_{2\text{-}1} + J_3 F_{2\text{-}3}$
$G_3 = J_2 F_{3\text{-}2}$

Possiamo trascurare $J_1F_{2\text{-}1}$ rispetto a $J_3F_{2\text{-}3}$ sia perché $F_{2\text{-}1} << F_{2\text{-}3}$ ma anche perché siamo interessati a temperature T_2 e T_3 molto maggiori di T_{amb}

restano quindi 4 equazioni:

$$G_2 = \frac{J_2 - \varepsilon_2 E_{n2}}{1-\varepsilon_2} \qquad G_3 = \frac{J_3 - \varepsilon_3 E_{n3}}{1-\varepsilon_3}$$

$$G_2 = J_3 F_{2-3} \qquad G_3 = J_2 F_{3-2}$$

che portano a

$$\begin{cases} J_3 F_{2-3}(1-\varepsilon_2) = J_2 - \varepsilon_2 E_{n2} \\ J_2 F_{3-2}(1-\varepsilon_3) = J_3 - \varepsilon_3 E_{n3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} J_2 - J_3 F_{2-3}(1-\varepsilon_2) = \varepsilon_2 E_{n2} \\ -J_2 F_{3-2}(1-\varepsilon_3) + J_3 = \varepsilon_3 E_{n3} \end{cases}$$

da cui

$$J_2\left[1 - F_{2-3}F_{3-2}(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)\right] = \varepsilon_2 E_{n2} + \varepsilon_3(1-\varepsilon_2)F_{2-3}E_{n3}$$

ed infine

$$G_1 = \frac{F_{1-2}\left[\varepsilon_2 E_{n2} + F_{2-3}(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3 E_{n3}\right]}{1 - F_{2-3}F_{3-2}(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$$

se il foro è molto piccolo assumiamo $F_{1\text{-}2} = F_{3\text{-}2} = F_{2\text{-}3} = 1$ ottenendo:

$$G_1 = \frac{\varepsilon_2 E_{n2} + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_3 E_{n3}}{\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_3}$$

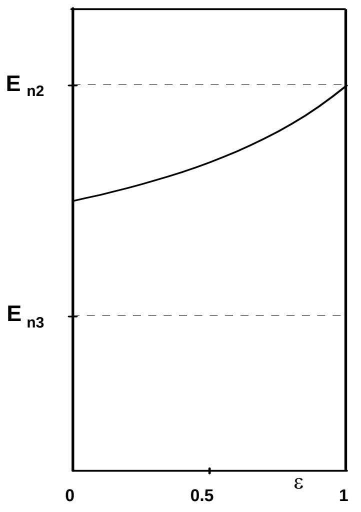
Possiamo fare alcune considerazioni:
- se $E_{n2} = E_{n3}$ la radiazione è di corpo nero
- se la sup (2) è nera la radiazione è di corpo nero
- se la sup (3) o la sup.(2) è reirragiante la radiazione è di corpo nero

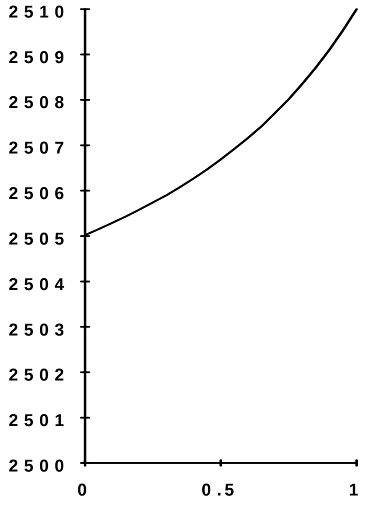
$$G_1 = \frac{\varepsilon_2 E_{n2} + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_3 E_{n3}}{\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_3}$$

Siamo interessati al caso $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, otteniamo:

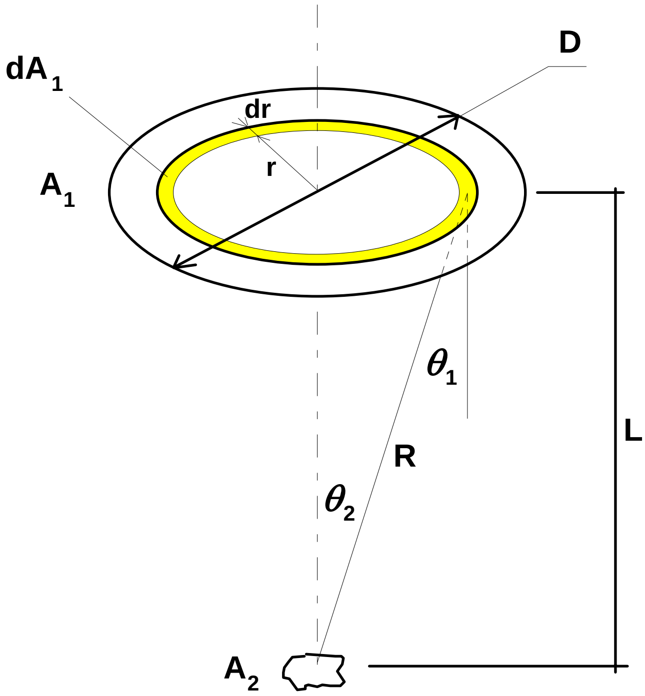
$$G_1 = \frac{E_{n2} + (1-\varepsilon)E_{n3}}{2-\varepsilon}$$

vediamo l'andamento qualitativo della radiazione, e della temperatura associata, in funzione di ε, si è assunto T_2=2510 e T_3 2500 (lambda sensore 0.9 μm)





***Esercizio* 2**
Si consideri un disco circolare di diametro D e area A_1 (caratterizzato da emissione diffusa) ed una piccola superficie planare (diffusa) di area $A_2 << A_1$. Le superfici sono parallele ed A_2 è distante L dal centro di A_1. Ottenere una espressione per il fattore di vista $F_{2\text{-}1}$.



Ipotesi:
- superfici diffuse
- $A_2 << A_1$

L'equazione per ricavare i fattori di vista recita:

$$F_{2-1} = \frac{1}{A_2}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{\pi R^2}dA_1 dA_2$$

Si nota che, siccome A_2 è piccola, R, θ_1 e θ_2 sono praticamente indipendenti dalla posizione su A_2 quindi

$$F_{2-1} = \int_{A_1}\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{\pi R^2}dA_1$$

inoltre $\theta_1=\theta_2=\theta$, per cui:

$$F_{2-1} = \int_{A_1}\frac{\cos^2\theta}{\pi R^2}dA_1$$

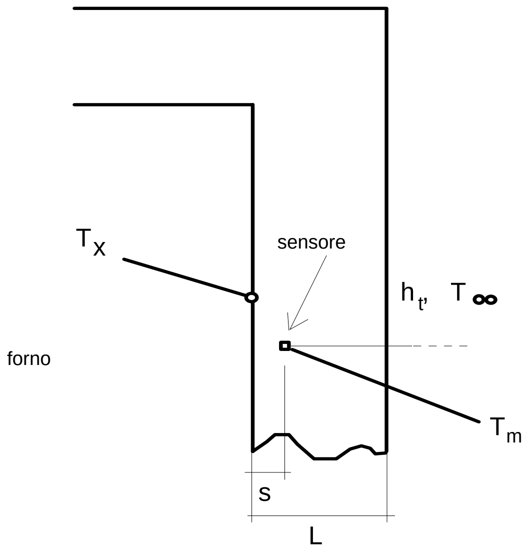
Siccome $R^2= r^2 + L^2$, $\cos\theta= L/R$ e $dA_1= 2\pi r dr$ segue:

$$F_{2-1} = 2L^2\int_0^{D/2}\frac{rdr}{(r^2+L^2)^2} = \frac{D^2}{D^2+4L^2}$$

6

Esercizi risolti

Esercizio 1
Si vuole calcolare la temperatura sulla sup. interna di un forno a partire dalla temperatura letta da un sensore posizionato come dal seguente schema.



dati : L = 10 cm; s= 1 cm
T_x = 20 °C
k_{parete} = 0.4 W/mK
h_{tot}= 10 W/m^{2}K
Temperatura misurata dal sensore : T_m= 500 °C

Sistema a regime

soluzione
Resistenza termica complessiva per unità di area fra sensore ed esterno:

$$R = (L-s)/k_p + 1/h_{tot} \qquad R = 0.4 \ m^2K/W$$

$$q'' = \frac{T_m - T_\infty}{R} = \frac{500-20}{0.4} = 1200 \left[W/m^2\right]$$

$$q'' = k\frac{T_x - T_m}{s}$$

$$T_x = T_m + \frac{sq''}{k} = 500 + \frac{1\cdot 10^{-2}\cdot 1200}{0.3} = 540[°C]$$

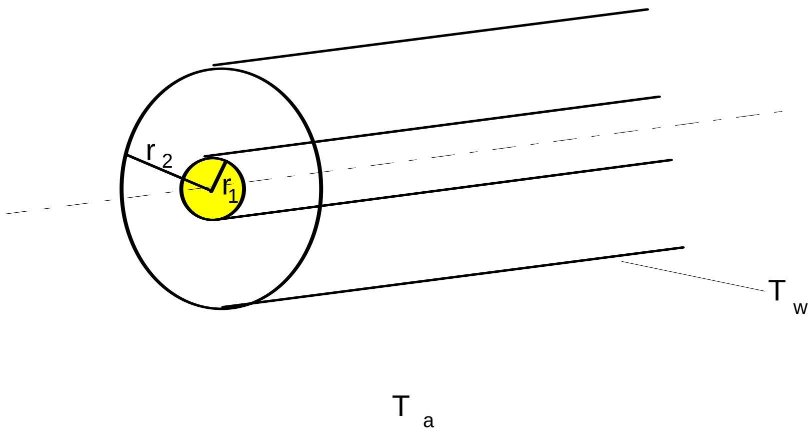
Esercizio 2

Un filo metallico avente raggio r_1=0.2 mm e ricoperto da uno strato isolante elettrico (k_2= 1 W/mK) di spessore s= r_2-r_1= 2 mm è riscaldato elettricamente dal passaggio di corrente elettrica continua (I =1 A) che, per effetto Joule, dà luogo ad una generazione di calore uniforme volumetrica q'''. La temperatura sulla sup. esterna dell'isolante vale T_w =21 °C mentre quella dell'aria indisturbata è T_a =20 °C

Assumendo che lo scambio termico con l'ambiente avvenga per sola convezione naturale (h= 10 W/m^2K), calcolare:

1) q''' W/m^3.
2) la resistenza elettrica per unità di lunghezza del conduttore.

Sistema a regime.



soluzione

dalla legge di Newton ho

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

$$\rightarrow q' = h \cdot 2\pi r_2 (T_w - T_\infty) = 0.138\,[W/m]$$

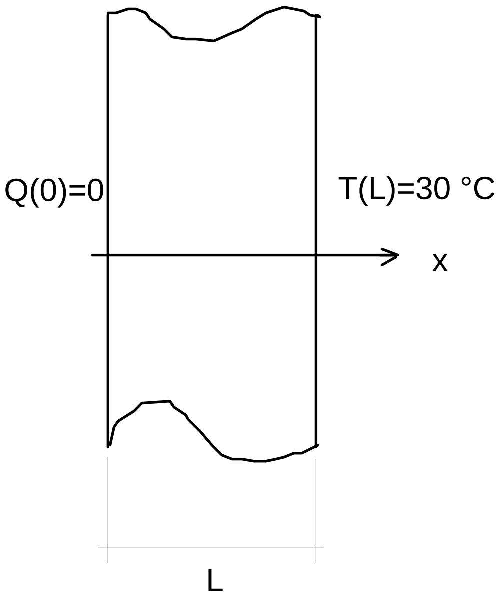
$$\rightarrow q''' = \frac{2r_2}{r_1^2} h(T_w - T_\infty) = 1.1 \cdot 10^6 \left[W/m^3\right]$$

ma q= RI^2 $\quad R = \frac{q}{I^2} = \frac{q' \cdot L}{I^2} \quad \rightarrow R' = \frac{R}{L} = \frac{q'}{I^2} = 0.138[\Omega/m]$

Esercizio 3

Si valuti la distribuzione di temperatura ed il suo valore massimo all'interno di una lastra metallica piana indefinita supposta adiabatica su una faccia e che presenta una temperatura di 30 °C sulla faccia opposta. All'interno della lastra agisce una sorgente termica volumetrica q''' = 9000 W/m^3. Lo spessore della lastra è L= 30 cm, la sua conducibilità termica è pari a k= 15 W/mK.

Sistema a regime



soluzione

regime permanente $\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0$ --> $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k}x + C_1$

ma in x=0 ho la condizione di adiabaticità: $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$ per cui C_1=0

integriamo ancora ottenendo $T(x) = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_2$ ma T_L= 30 °C per cui

$$C_2 = T_L + \frac{q'''L^2}{2k}$$

Sarà quindi $T(x) = T_L + \frac{q'''}{2k}(L^2 - x^2)$ $\qquad T(x) = 57 - 300 \cdot x^2\ [°C]$

La temperatura massima, ovviamente in x=0, varrà 57 °C:

$$T_{max} = T_L + \frac{q'''}{2k}L^2 = 30 + \frac{9000 \cdot 0.3^2}{2 \cdot 15} = 57\ [°C]$$

Esercizio 4

Una barra cilindrica metallica molto lunga, di raggio r=1cm e conducibilità termica k= 15 [W/mK], è sede di una sorgente termica volumetrica costante q'''= 840 [kW/m^3]. Essa viene refrigerata da una corrente ortogonale di aria avente velocità media pari a 10 m/s e temperatura T_∞ =20 °C. Valutare la temperatura sull'asse e sulla superficie della barra.
Adottare per il calcolo del coefficiente di scambio termico medio convettivo, la seguente correlazione:

$$\overline{N}_{uD} = C \cdot \mathrm{Re}_D^n \cdot \mathrm{Pr}^{0.33}$$

dove C ed n dipendono dal numero di $R_{e\,D}$ secondo la seguente tabella

Re_D	***C***	***n***
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4k	0.683	0.466
4k-40k	0.193	0.618
40k-400k	0. 027	0.805

Soluzione

A regime la potenza generata è uguale a quella ceduta:

$$q''' \cdot V = hA(T_w - T_\infty)$$

Per unità di lunghezza avremo

$$q''' \cdot \pi r^2 = h2\pi r(T_w - T_\infty)$$

Le proprietà termofisiche del fluido andranno calcolate alla T del film. Occorre quindi un processo iterativo. Supponiamo la T di parete pari a 80 °C, per cui calcoleremo le proprietà a T_{film}= 50 °C ottenendo per l'aria:

k= 27.88 10^{-3}[W/m K] ν= 182.65 10^{-7} [m^2/s] Pr=0.711

sarà allora $$R_{eD} = \frac{wD}{\nu} = \frac{10 \cdot 0.02}{182.65 \cdot 10^{-7}} = 10950$$

quindi 4k<Re<40k

C=0.193 n=0.618

ricaviamo un numero di Nusselt pari a:

Nu_D=54.1

e di hpari a

h= 75.4 [W/m^{2}K]

La T alla parete varrà allora

$$T_w = T_\infty + \frac{q'''r}{2h} = 20 + \frac{840000 \cdot 0.01}{2 \cdot 75.4} = 75.7\ [°C]$$

la T del film allora vale T_{film}=47.85 molto vicina a quella di partenza. Ripetiamo comunque i calcoli ottenendo:

k= 27.85 10^{-3}[W/m K] ν= 182.22 10^{-7} [m^2/s] Pr=0.711

$$R_{eD} = \frac{wD}{\nu} = \frac{10 \cdot 0.02}{182.22 \cdot 10^{-7}} = 10976$$

Nu_D=54.16

$$h \cong 75.4 \text{ [W/m}^2\text{K]}$$

quindi andava bene la T_w di prima.

La temperatura sull'asse è infine data da

$$T_{\text{asse}} = T_w + \frac{q'''r^2}{4k} = 75.7 + \frac{840000 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2}{4 \cdot 15} = 77.1\ °C$$

Esercizio 5

La temperatura in un forno, durante un transitorio di accensione, viene misurata per mezzo di una termocoppia sospesa al suo interno e in contatto con aria da considerarsi perfettamente trasparente. La termocoppia indica una temperatura di 100 °C. Sapendo che le pareti interne del forno sono ad una temp. 160 °C, si determini la temperatura dell'aria assumendo:

- emittenza della termocoppia (corpo grigio in grande cavità) 0.7
- coefficiente di scambio termico convettivo medio termocoppia-aria 10 [W/m²K]

Si consideri il sensore in equilibrio termico con l'aria (convezione) e la parete (irraggiamento).

Soluzione

L'equilibrio termico impone che non vi sia scambio netto fra termocoppia e ambiente, ovvero:

$$q_{irr} + q_c = 0$$

Contributo radiativo (chiamando [1] la termocoppia e [2] le pareti):

$$q_{irr} = A_1\, \sigma \mathcal{F}_{1-2}\, (T_1^4 - T_2^4) \qquad \text{con} \qquad \mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{F_{1-2}} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

ma $F_{1\text{-}2}$= 1 e A_2>>A_1

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + 0} = \varepsilon$$

Siccome q_{irr} è acquistato q_c dovrà essere ceduto, quindi $T_{aria}<T_{tc}$

$$A_e\, \sigma\varepsilon\, (T_{tc}^4 - T_{pareti}^4) + A_e h_c (T_{tc} - T_{aria}) = 0$$

per cui:

$$(T_{aria} - T_{tc}) = \frac{\sigma\, \varepsilon}{h_c}\, (T_{tc}^4 - T_{pareti}^4)$$

$$T_{aria} = 373.15 + \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.7}{10}(373.15^4 - 433.15^4) = 310.4\ [K]$$

ovvero $T_{aria} \approx$ **37.2** °C

Esercizio 6
Le due facce di un grande pannello di perlite espansa di spessore L=10 cm si trovano rispettivamente alla temperatura T_1= 120 °C e T_2= 20 °C. Si determini:

1) Il flusso termico specifico che attraversa il pannello sapendo che la conducibilità termica della perlite espansa dipende dalla temperatura secondo la seguente relazione:

$$k(T) = 0.005 + 1 \cdot 10^{-6} \cdot T \quad \text{[W/m°C]} \qquad \text{(temp. in centigradi)}$$

2) La temperatura al centro della lastra (x= 5 cm)

Si assuma geometria piana e sistema a regime

soluzione
1)

$$q = -k(T)\frac{dT}{dx} \qquad\qquad k = k_0 + k_1 \cdot T$$

$$q = -\frac{1}{L}\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT = \frac{k_0(T_1 - T_2) + 0.5 \cdot k_1(T_1^2 - T_2^2)}{L}$$

$$q^* = \frac{0.005(120 - 20) + 0.5 \cdot 10^{-6}(120^2 - 20^2)}{0.1} = 5.07 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

2)

$$q^* L/2 = -\int_{T_1}^{T(L/2)} k(T)dT = k_0(T_1 - T(L/2)) + 0.5 \cdot k_1(T_1^2 - T(L/2))$$

$$T^2(L/2) + 2\frac{k_0}{k_1}T(L/2) - \left(T_1^2 + 2\frac{k_0}{k_1}T_1 - q^* L/k_1\right) = 0$$

$T(L/2)$= 70.25 °C

***Esercizio* 7**
Una lamiera in ferro delle dimensioni 1 m x 2 m x 0.002 m, inizialmente alla temperatura di 300 °C viene refrigerata in aria ambiente (temperatura aria: 25 °C). Il coeff. di scambio termico globale medio vale h = 30 [W/m^{2}K]. La conduttività termica della lamiera è k=40 [W/mK], la densità ρ= 7800 [kg/m^3] ed il calore specifico c= 480 [J/kgK].
1) Verificare l'applicabilità del modello di corpo sottile.
2) Calcolare il tempo impiegato per raggiungere la temperatura di 150 °C.
3) Calcolare il calore complessivo ceduto all'aria fino a quell'istante.

soluzione

1) Controllo numero di Biot:

$$B_i = \frac{hL_{eq}}{k} \qquad L_{eq} = \frac{V}{A} \cong s/2$$

$$B_i = \frac{30 \cdot 0.001}{40} = 7.5 \cdot 10^{-4} << 0.1 \;\; o.k.$$

2)

$$\ln\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho c V}(t - t_0)$$

il tempo necessario affinché T= 150 °C sarà

$$t_{150} = -\frac{\rho c V}{hA}\ln\frac{150 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{7800 \cdot 480 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.002}{30 \cdot 4}\ln\frac{150 - 25}{300 - 25} = 98.4[s]$$

3) Troviamo il calore ceduto in questo periodo di tempo:

$$Q = \rho c V \cdot [T_i - 150] = 7800 \cdot 480 \cdot 0.004 \cdot [150] = 2.25 \cdot 10^3 [kJ]$$

Esercizio 8

Un conduttore di rame (r_1=5 mm, L=1 m) è soggetto ad una differenza di potenziale. Il sistema quindi dissipa a regime una certa potenza per effetto Joule che è ceduta all'ambiente per convezione naturale ed irraggiamento.
Sapendo che il flusso termico ceduto per irraggiamento vale q''_{irr}= 370 W/m^2 e che la temperatura ambiente è T_a= 20 °C, valutare:

La potenza complessiva [W] generata all'interno del conduttore per effetto Joule.

Si assuma:

emissività sup. esterna	ε= 0.8
coeff. scambio conv.naturale	*h*= 10 W/m^{2}K

soluzione

$$R = 0.005\text{ m} \quad L = 1\text{m} \quad S = 3.14\ 10^{-2}\ \text{m}^2$$

$$P = q_{tot}''S = q'''V$$

$$q''_{tot} = q''_{irr} + q''_{conv}$$

$$q''_{irr} = \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_a^4) = 370 \quad [W/m^2]$$

$$T_w = \left[T_a^4 + \frac{q''_{irr}}{\varepsilon\sigma}\right]^{1/4} = \left[(293.15)^4 + \frac{370}{0.8\cdot 5.67\cdot 10^{-8}}\right]^{1/4} = 353.1 \quad [K] = 79.9\,[°C]$$

$$q''_{conv} = q''_{irr} + h(T_w - T_a) = 370 + 10\cdot 59.9 \approx 970 \quad \left[W/m^2\right]$$

La potenza generata vale quindi:

$$P = q_{tot}\cdot 2\pi RL = 970\cdot 3.14\cdot 10^{-2} = 30.5[W]$$

Esercizio 9

Un transistor dissipa, in condizioni di regime una potenza termica pari 0.5 [W]. Calcolare la temperatura di regime del componente nei seguenti casi:
1) Scambio termico unicamente radiativo.
2) Scambio termico unicamente per convezione.

Si assumano i seguenti dati:

Superficie di scambio	A= 9 cm^2
Emissività	ε = 0.85
Coeff di scambio termico convettivo	h = 11 [W/m^{2}K]
Temperatura ambiente	$T_a = T_{a\ rad}$ = 20 °C

Soluzione
<u>1° caso</u>

$$q_{1-amb} = A_1\ \sigma\ \mathcal{F}_{1-amb}\ (T_1^4 - T_{a\ rad}^4)$$

Assumendo piccolo corpo in grande cavità sarà $\mathcal{F}_{1-amb} = \varepsilon_1$ per cui

$$T_1 = \left[T_{a\ rad}^4 + \frac{q_{1-amb}}{A_1 \cdot \sigma \cdot \varepsilon} \right]^{1/4}$$

$$T_1 = \left[(20 + 273.15)^4 + \frac{0.5}{9 \cdot 10^{-4} \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.85} \right]^{1/4} = 370.85K = 97.7°C$$

<u>2° caso</u>

$$q_{conv} = A_1\ h\ (T_1 - T_a)$$

$$T_1 = T_a + \frac{q_{conv}}{A_1 \cdot h}$$

$$T_1 = 20 + \frac{0.5}{9 \cdot 10^{-4} \cdot 11} = 70.5°C$$

Appendice: altre prove scritte

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

4 Ottobre 2002

Una tubazione in acciaio del diametro interno D_i =2.5 cm e dello spessore di 3.0 mm, è percorsa da acqua alla temperatura media di 80.0 °C ed alla velocità media di 30.0 cm/s.
Valutare il flusso termico per unità di lunghezza di tubo disperso all'aria ambiente.
Valutare inoltre di quanto si ridurrebbe tale flusso, se si coibentasse la tubazione con uno strato di 3.0 cm di isolante.
Quale è la resistenza termica prevalente nel caso di tubo nudo ?
Quale è la resistenza termica prevalente nel caso di tubo isolato?

Assumere i seguenti dati:

Temperatura dell'aria ambiente: $T_a = 20.0\,°C$

Conduttività termica acciaio: $K_{acc} = 20.0\ \frac{W}{m\ K}$

Conduttività termica isolante: $K_{is} = 0.035\ \frac{W}{m\ K}$

Coefficiente convettivo esterno (assunto costante): $h_e = 7.0\ \frac{W}{m^2\ K}$

Contributi di scambio radiativo esterno trascurabili.

Soluzione

All’interno del tubo il numero di Reynolds vale:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m\, D_i\, \rho}{\mu} = \frac{0.3\, m/s \cdot 0.025\, m \cdot 973\, kg/m^3}{350 \cdot 10^{-6}\ Pa \cdot s} = 20850$$

La convezione forzata è turbolenta ed applicando la correlazione di Dittus-Boelter si ha:

$$Nu = 0.023\, \mathrm{Re}^{08}\ \mathrm{Pr}^{0.33}$$

$$Nu = 0.023 \cdot 20850^{0.8} \cdot 2.2^{0.33} = 85.32$$

$$h_i = Nu \cdot \frac{K}{D_i} = 85.32 \cdot \frac{0.67}{0.025} = 2287\ \frac{W}{m^2\ K}$$

Il flusso disperso dall’acqua nell’aria ambiente può calcolarsi mediante la relazione:

$$q = \frac{2\, \pi\, L \cdot \Delta T}{\dfrac{1}{h_i\, r_i} + \dfrac{\ln \dfrac{r}{r_i}}{K_{acc}} + \dfrac{1}{h_e r}} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 60}{\dfrac{1}{2287 \cdot 0.0125} + \dfrac{\ln 1.24}{20} + \dfrac{1}{7 \cdot 0.0155}} =$$

$$= \frac{377}{0.03498 + 0.01076 + 9.2165} = 40.7 \frac{W}{m}$$

Nel caso di tubo isolato

$$q = \frac{2\, \pi\, L \cdot \Delta T}{\dfrac{1}{h_i\, r_i} + \dfrac{\ln \dfrac{r}{r_i}}{K_{acc}} + \dfrac{\ln \dfrac{r_e}{r}}{K_{is}} + \dfrac{1}{h_e r_e}} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 60}{\dfrac{1}{2287 \cdot 0.0125} + \dfrac{\ln 1.24}{20} + \dfrac{\ln 2.9355}{0.035} + \dfrac{1}{7 \cdot 0.0455}} =$$

$$= \frac{377}{0.03498 + 0.01076 + 30.77 + 3.14} = 11.1\ \frac{W}{m}$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

8 Novembre 2002

Una barra cilindrica di combustibile nucleare è refrigerata con acqua in convezione forzata. Nelle condizioni di funzionamento normale, la potenza termica per unità di volume generata nella barra è $q'''=10^7$ W/m^3 ed il coefficiente di scambio termico convettivo vale h=1100 W/m^{2}K). Valutare la temperatura massima che si raggiunge in queste condizioni.
Se, a causa di un malfunzionamento del sistema di refrigerazione, il coefficiente di scambio termico convettivo si riducesse al valore h=100 W/m^{2}K, valutare la temperatura massima che si raggiungerebbe, a regime, in questa nuova condizione.
Considerando sempre un coefficiente di scambio termico convettivo h=100 W/m^2 e come temperatura di fusione del materiale T_{fus} =1250 °C, valutare il massimo valore della potenza termica che potrebbe essere dissipata nella barra evitandone la fusione.

Assumere i seguenti dati:

cilindro molto lungo avente un diametro D=2.5 cm
regime termico stazionario
temperatura dell'acqua refrigerante : $T_{H_2O} = 250\ °C$
Conduttività termica della barra: $k = 30.0\ \dfrac{W}{m\ K}$

Soluzione

La distribuzione di temperatura nella barra cilindrica in regime stazionario si ottiene risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{q'''}{k}=0$$

con le condizioni al contorno:

$$r=0; \quad \frac{dT}{dr}=0;$$
$$r=R; \quad T=T_w;$$

si ha:

$$T(r)=T_{H_2O}+\frac{q'''R}{2h}+\frac{q'''R^2}{4k}\cdot\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

da cui $T_{\max}$ risulta:

$$T_{max}=T_{H_2O}+\frac{q'''R}{2h}+\frac{q'''R^2}{4k}$$

Nelle condizioni normali di funzionamento si ha:

$$T_{max}=250+\frac{10^7\cdot 0.0125}{2\cdot 1100}+\frac{10^7\cdot(0.0125)^2}{4\cdot 30}=250+56.82+13.02=319.84\ °C$$

Nelle condizioni di incidente si ha:

$$T_{max}=250+\frac{10^7\cdot 0.0125}{2\cdot 100}+\frac{10^7\cdot(0.0125)^2}{4\cdot 30}=250+625+13.02=888.02\ °C$$

Il flusso termico massimo che può dissipare la barra evitando la fusione è:

$$q'''_{max}=\frac{T_{fus}-T_{H_2O}}{\left(\frac{R}{2\cdot h}+\frac{R^2}{4\cdot k}\right)}=\frac{1250-250}{0.0000625+0.000001302}=\frac{1000}{0.000063802}=1.5673489\cdot 10^7\ W/m^3$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

6 Dicembre 2002

Un lungo filo nudo di rame è percorso da corrente elettrica ed è refrigerato per convezione naturale in aria stagnante e per irraggiamento. Il filo, disposto orizzontalmente, ha un diametro D= 1.0 mm e la sua temperatura superficiale costante è T_w =127 °C. La temperatura dell'aria è T_{aria} =27 °C ed anche la temperatura delle pareti del locale in cui è situato il filo è T_{amb} =27 °C. Valutare: il coefficiente di scambio termico convettivo e la potenza termica specifica complessivamente dissipata dal filo.
Domanda facoltativa: valutare la temperatura interna sull'asse del filo di rame.

Assumere i seguenti dati:
Emissività del rame. ε=0.8
Per lo scambio termico in convezione naturale utilizzare la correlazione di Morgan:

$$Nu = \frac{h\,D}{k} = C\,Ra_D^n$$

dove i valori dei coefficienti C ed n, in funzione del numero di Rayleigh, sono riportati nella successiva tabella:

Ra_D	C	n
10^{-10} - 10^{-2}	0.675	0.058
10^{-2}-10^{2}	1.02	0.148
10^{2}-10^{4}	0.850	0.188
10^{4}-10^{7}	0.480	0.250

Dove

$$Ra_D = Gr_D\,Pr = \frac{\beta g\,D^3 \Delta T}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{a}$$

Soluzione:

La temperatura media del film è $T_f = \frac{T_w + T_{aria}}{2} = \frac{400+300}{2} = 350\ K$

Per l'aria a 350 K si ha: k=0.03 W/m K, Pr=0.7,

$$Ra_D = \frac{\frac{1}{350} \cdot 9.81 \cdot (0.001)^3 (400-300)}{\left(20.92 \cdot 10^{-6}\right)^2} \cdot 0.7 = 4.483$$

Dalla tabella si ricava che C=1.02 ed n=0.148.

$$h = \frac{k}{D} \cdot C Ra_D^n = \frac{0.03}{0.001} \cdot 1.02 \cdot 4.483^{0.148} \approx 38.21\ \frac{W}{m^2 K}$$

$$q'' = h \cdot (400-300) + \varepsilon\sigma\left(400^4 - 300^4\right) = 38.21 \cdot 100 + 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(400^4 - 300^4\right) =$$
$$= 3821 + 793.8 = 4614.8\ \frac{W}{m^2}$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

10 Gennaio 2003

Una lastra quadrata sottile orizzontale, di dimensioni 0.20 m x 0.20 m, è refrigerata in aria stagnante. La temperatura costante dell'aria è T_a=27 °C ed anche le pareti dell'ambiente circostante si trovano alla stessa temperatura dell'aria mentre la temperatura della piastra è mantenuta al valore T_p =127 °C. Valutare il flusso termico complessivo scambiato tra la piastra e l'ambiente.

Assumere le superfici della piastra grigie, con emissività pari a ε =0.8.

Soluzione

Temperatura media del film T_f=(300+400)/2=350 K

Ra=*Gr Pr*= $Ra = \dfrac{9.81 \cdot 0.20^3 \cdot 100}{350 \cdot \left(20.92 \cdot 10^{-6}\right)^2} Pr = 5.12 \cdot 10^7 \cdot 0.7 = 3.584 \cdot 10^7$ 0.7=3.584 10^7

$$Nu = 0.15\, Ra_L^{1/3}$$
$$Nu = 0.27\, Ra_L^{1/4}$$

$$h = \frac{K}{L} \cdot 0.15 \cdot Ra_L^{1/3} = 0.15 \cdot \frac{0.03}{0.20} \cdot \left(3.584 \cdot 10^7\right)^{0.3333} = 7.4 \ \frac{W}{m^2\, K}$$
$$h = \frac{K}{L} 0.27 \cdot Ra_L^{1/3} = 0.27 \cdot \frac{0.03}{0.20} \cdot \left(3.584 \cdot 10^7\right)^{0.25} = 3.13 \ \frac{W}{m^2 K}$$

$$q = (7.4 + 3.13) \cdot 0.20 \cdot 0.20 \cdot 100 + 2 * 0.8 * 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(400^4 - 300^4\right) \cdot 0.2 \cdot 0.2 =$$
$$42.12 + 63.5 \ W = 105.62 \ \ W$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

7 Marzo 2003

Una lunga tubazione di acciaio del diametro interno D_i=2.5 cm e spessore 2 mm, è percorsa da una portata di acqua pari a G=0.6 kg/s. La temperatura di ingresso dell'acqua è di 77 °C. La tubazione è lunga 100 m e la temperatura del fluido esterno è T_a =20 °C. Valutare di quanto si riduce la temperatura media dell'acqua all'uscita della tubazione.
Assumere i seguenti dati:
Conduttività termica dell'acciaio: k=25 W/mK
Coefficiente di scambio termico lato fluido esterno: h=100 W/m^2 K

Soluzione

$$A = \pi\, D^2 / 4 = 3.14 \cdot 0.025^2 / 4 = 0.00049\ m^2$$

$$G = v_m \cdot A \cdot \rho \qquad v_m = \frac{G}{A \cdot \rho} = \frac{0.6\ \ kg/s}{0.00049\ m^2 \cdot 974\ kg/m^3} = 1.257\ \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{v_m D\, \rho}{\mu} = \frac{1.257 \cdot 0.025 \cdot 974}{0.000365} = 83857$$

$$Pr = 2.29$$

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8}\, Pr^{1/3} = 0.023 \cdot 83857^{0.8} \cdot 2.29^{0.33} = 0.023 \cdot 8686 \cdot 1.32 = 263.7$$

$$Nu = \frac{h\, D}{k};\ h = \frac{k\, Nu}{D} = \frac{0.668 \cdot 263.7}{0.025} = 7046\ \frac{W}{m^2\ K}$$

$$U = \frac{1}{\dfrac{0.0145}{0.0125 \cdot 7046} + 0.0145 \dfrac{ln \dfrac{0.0145}{0.0125}}{25} + \dfrac{1}{100}} =$$

$$= \frac{1}{0.000164632 + 0.000086083 + 0.01} = \frac{1}{0.0102507} = 97.55 \frac{W}{m^2\ K}$$

$$q = K \cdot A_e \cdot (T_i - T_a) = 97.55 \cdot \pi \cdot D_e \cdot 100 \cdot (T_i - T_e) = 97.55 \cdot 3.14 \cdot 0.029 \cdot 100 \cdot 57 = 50632\ W$$

$$q = cG\, \Delta T;\quad \Delta T = \frac{50632}{4195 \cdot 0.6} = 20.1\ °C$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

4 Aprile 2003

Una resistenza elettrica inguainata in acciaio inossidabile è immersa in un grande recipiente riempito di acqua alla temperatura costante di 20 °C . La resistenza, inizialmente in equilibrio termico con l'acqua, dissipa una potenza di 500 W . Valutare la temperatura di regime della resistenza, la temperatura raggiunta dopo che è trascorso un tempo pari alla costante di tempo ed il calore smaltito dalla resistenza all'acqua dopo che è trascorso un tempo pari a 3 minuti. .
Si assuma di poter considerare, in prima approssimazione, la resistenza inguainata come un filo omogeneo di acciaio inox.

Assumere inoltre i seguenti dati:
Diametro e lunghezza della resistenza rispettivamente D=1 cm; L=0.5 m;

Conduttività termica dell'acciaio inox :	k=25 W/mK
Densità dell'acciaio inox	ρ=7900 kg/m^3
Calore specifico dell'acciaio inox	c=480 J/kg K

Coefficiente di scambio termico medio: h=150 W/m^2 K

Soluzione

$A = \pi\, D\, L = 3.14 \cdot 0.01 \cdot 0.5 = 0.0157\ m^2$;

$V = \pi\, D^2\, L/4 = 3.14 \cdot 0.01^2 \cdot 0.5/4 = 0.000039268\ m^3$

$Bi = \dfrac{h \cdot D}{k} = \dfrac{150 \cdot 0.01}{25} = 0.06 < 0.1$ L'analisi lumped è consentita

$$T = T_a + \frac{P}{h \cdot A}\left[1 - e^{-\frac{hA}{\rho c v}\cdot\tau}\right]$$

$$T_{a\,sint} = 20 + \frac{500}{150 \cdot 0.0157} = 20 + 212.3 = 232.3\ °C$$

$$\tau_0 = \frac{\rho\, c\, V}{h\, A} = \frac{7900 \cdot 480 \cdot 0.00003927}{150 \cdot 0.015707} = 63.2\ s$$

$$T = 20 + \frac{500}{150 \cdot 0.0157}\left[1 - \frac{1}{e}\right] = 20 + 134.2 = 154.2\ °C$$

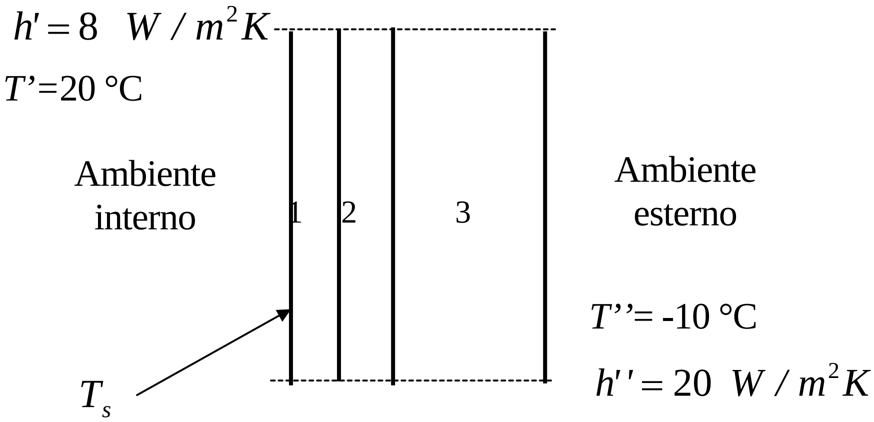
$$Q = \int_0^\tau h \cdot A \cdot (T - T_a)\, d\tau = \int_0^\tau h \cdot A \cdot \frac{P}{h \cdot A}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right) d\tau = P\left[\tau - \tau_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\right]$$

$$Q = 500 \cdot \left(180 - 63.2 \cdot \left(1 - 0.05795\right)\right) = 60.2\ kJ$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

6 Giugno 2003

Una parete di contenimento perimetrale di un edificio è composta da tre strati di materiali, come indicato in figura, e separa un ambiente interno, mantenuto ad una temperatura costante pari a T' =20 °C da quello esterno, che si trova ad una temperatura, anch'essa costante, pari a T'' = -10 °C. Per evitare il rischio di condensa di vapore sulla parete interna occorre mantenere la sua temperatura superficiale T_s ad un valore non inferiore a 15 °C. Determinare quale è lo spessore minimo dell'isolante, in grado di soddisfare questo vincolo. Determinare inoltre, in queste condizioni, il flusso termico specifico disperso nell'ambiente esterno.



Si assumano i seguenti dati:

1= intonaco	$h' = 8 \quad W/m^2K$
2= isolante	$h'' = 20 \quad W/m^2K$
3= mattoni forati	K_1=0.8 W/m K
L_1=2 cm	K_2=0.05 "
L_2= ?	K_3=0.4 "
L_3=8 cm	

Soluzione

$$q = \frac{\Delta T^*}{R} = \frac{\Delta T^*}{\frac{1}{h' \cdot A}} = \overline{K} \cdot A \cdot \Delta T = \frac{1}{\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3}} \cdot A \cdot \Delta T \quad ;$$

dove

$$\Delta T^* = T' - T_s = 20 - 15 = 5\ °C; \quad \Delta T = 20 - (-10) = 30\ °C;$$

$$L_2 \geq k_2 \cdot \left(\frac{\Delta T}{\Delta T^* h'} - \left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_3}{k_3} \right) \right) = 0.05 \cdot \left(\frac{30}{5 \cdot 8} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{0.02}{0.8} + \frac{0.08}{0.4} \right) \right)$$

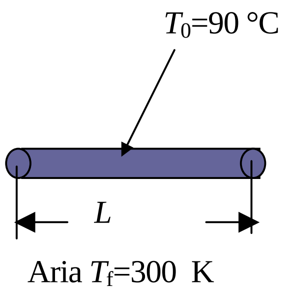
$$\begin{aligned} L_2 &\geq 0.05 \cdot (0.75 - (0.125 + 0.05 + 0.025 + 0.2)) = \\ &= 0.05 \cdot (0.75 - 0.4) = 0.0175\ m = 1.75\ cm \end{aligned}$$

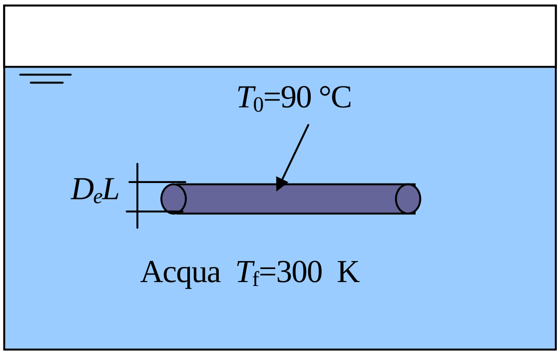
$$\begin{aligned} q'' &= U \cdot \Delta T = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{0.02}{0.8} + \frac{0.0175}{0.05} + \frac{0.08}{0.4}} \cdot 30 = \\ &= \frac{1}{0.75} \cdot 30 = 1.33333 \cdot 30 = 40\ \ W/m^2 \end{aligned}$$

Prova scritta di Energetica per Allievi Meccanici

4 Luglio 2003

Una barretta cilindrica massiccia di acciaio inossidabile avente un diametro D_e=1 cm e lunghezza L=20 cm ha la temperatura iniziale T_0=90 °C. La barretta viene refrigerata immergendola, in posizione orizzontale, in un fluido stagnante, con temperatura costante pari a T_f=300 K. Confrontare le costanti di tempo del transitorio di refrigerazione della barretta nel caso in cui il fluido refrigerante sia aria ovvero acqua, nell'ipotesi di poter adottare, in entrambi i casi, la trattazione semplificata "lumped".





Assumere i seguenti dati, costanti, per l'acciaio inox:

$\rho = 8230 \quad Kg/m^3; \quad c = 520 \quad j/Kg\ K;$

Assumere come correlazione di scambio termico la seguente:

$$Nu = C\ Ra^{n}$$

Ra	C	n
10^{-2}-10^{2}	1.02	0.148
10^{2}-10^{4}	0.85	0.188
10^{4}-10^{7}	0.48	0.250
10^{7}-10^{12}	0.125	0.333

Assumere inoltre il coefficiente di scambio termico convettivo costante, durante il transitorio, con le proprietà termofisiche del fluido valutate alla temperatura media del film T_{film}=350 K. Si consideri infine trascurabile lo scambio radiativo.

Soluzione

$$\tau_0 = \frac{\rho\, c\, V}{h\, A};$$

$A = \pi\, D_e L$ =3.1415 0.01 0.20+2 3.14.15 0.01^2 /4 = 0.00628319+0.00015708=
=0.00644027 m^2

$V = \pi D_e^2 / 4 \cdot L$ =1.5708 10^{-5} m^3

Calcolo di h per l'aria:

$$Ra = \frac{\beta\, g\, D_e^3 \Delta T}{\nu^2} \cdot Pr = \frac{1/350 \cdot 9.81 \cdot (0.01)^3 (90 - 26.85)}{(20.92 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0.7 = 2.831 \cdot 10^3$$

$$h = \frac{k}{D_e} \cdot 0.85 \cdot Ra^{0.188} = \frac{0.03}{0.01} \cdot 0.85 \cdot (2.831 \cdot 10^3)^{0.188} = 11.36\ \frac{W}{m^2\, K}$$

Calcolo di h per l'acqua

$$Ra = \frac{\beta\, g\, D_e^3 \Delta T}{\nu^2} \cdot Pr = \frac{624.2 \cdot 10^{-6}\ \ \cdot 9.81 \cdot (0.01)^3 (90 - 26.85)}{(3.7485 \cdot 10^{-7})^2} \cdot 2.29 = 6.3 \cdot 10^6$$

$$h = \frac{k}{D_e} \cdot 0.48 \cdot Ra^{0.25} = \frac{0.668}{0.01} \cdot 0.48 \cdot (6.3 \cdot 10^6)^{0.25} = 1600\ \frac{W}{m^2\, K}$$

Costanti di tempo:

$$\tau_0 = \frac{\rho\, c\, V}{h\, A} = \frac{8230 \cdot 520 \cdot 1.5708 \cdot 10^{-5}}{11.36 \cdot 0.00644027} = 918.78\ s;$$

$$\tau_0 = \frac{\rho\, c\, V}{h\, A} = \frac{8230 \cdot 520 \cdot 1.5708 \cdot 10^{-5}}{1606 \cdot 0.00644027} = 6.50\ s;$$

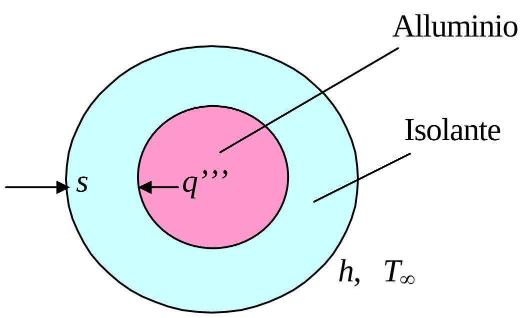
Prova scritta di Energetica 1 per Allievi Meccanici

12 Settembre 2003

Un cavo elettrico di alluminio molto lungo del diametro D=0.5 mm è posto in aria stagnante ed il coefficiente di scambio termico complessivo (convezione ed irraggiamento) tra la superficie esterna del cavo e l'ambiente vale h=35 W/m^{2}K.
Nel conduttore elettrico viene fatta passare una corrente costante e, per effetto Joule, viene dissipato un flusso termico per unità di volume q''' anch'esso costante nel tempo.
Valutare: la temperatura massima raggiunta dal filo di alluminio.
Valutare la temperatura della superficie del cavo all'interfaccia con l'aria.
Valutare inoltre la temperatura all'interfaccia con l'aria dello stesso cavo, nell'ipotesi di coibentarlo con uno spessore s di isolante. Valutare infine, sempre nel caso di cavo coibentato, la temperatura all'interfaccia alluminio-isolante.

Si assumano i seguenti dati:

Conduttività termica alluminio:	K_{al}=180 W/m K;
Conduttività termica isolante:	K_{is}=0.12 W/m K;
Flusso termico generato nel conduttore elettrico:	$q'''=10^7$ W/m^3;
Temperatura dell'aria ambiente:	T_∞ =25 °C ;
Spessore dell'isolante	s=0.3 mm;



SOLUZIONE

Caso del cavo nudo

$$T_{max} = T_\infty + \frac{q''' R_1}{2h} + \frac{q''' R_1^2}{4k_{al}} = 25 + \frac{10^7 \cdot 0.25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 35} + \frac{10^7 \cdot \left(0.25 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4 \cdot 180} =$$

$$= 25 + 35.7 + 0.00087 = 60.700087\,°C$$

$$T_1 = T_\infty + \frac{q''' \cdot R_1}{2 \cdot h} = 25 + 35.7 = 60.7\ °C$$

Caso del cavo coibentato

$$q''' \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot h \cdot \left(T_2 - T_\infty\right)$$

$$T_2 = T_\infty + \frac{q''' \cdot R_1^2}{2 \cdot R_2 \cdot h} = 25 + \frac{10^7 \cdot \left(0.25 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 0.55 \cdot 10^{-3} \cdot 35} = 25 + 16.230 = 41.23\ °C$$

$$q = \frac{\Delta T}{\dfrac{ln\dfrac{R_2}{R_1}}{2 \cdot \pi \cdot k_{is} \cdot L}} = \pi \cdot R_1^2 \cdot q''' \cdot L; \qquad \Delta T = \frac{R_1^2 \cdot q'''}{2 \cdot k_{is}} \cdot ln\frac{R_2}{R_1};$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{\left(0.25 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 10^7}{2 \cdot 0.12} \cdot ln\frac{0.55}{0.25} = 2.604 \cdot 0.788457 = 2.05314;$$

$$T_1 = T_2 + 2.05 = 41.23 + 2.053 = 43.283\ °C$$